Travaux Dirigés 14 - Correction

Déterminer des torseurs à partir d'une définition locale des AM

Exercice 1 : Calcul de centre de gravité

Question 1 : Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de surface associé

- *Coordonnée cartésienne / dS = y(x)dx*

Question 2 : Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire la surface étudiée

- *x∈ [0, a] / y∈ [0, b]*

Question 3 : Déterminer la surface du triangle par calcul intégral

$$dS = y(x) \cdot dx$$

$$S = \iint dS = \int_0^a y(x) \cdot dx$$

$$S = \int_0^a (\frac{-b}{a} x + b) \cdot dx$$

$$S = \left[\frac{-b}{2 \cdot a} \cdot x^2 + b \cdot x\right]_0^a$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

Question 4 : Déterminer les coordonnées XG et YG du centre géométrique du triangle en fonction de a et b

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_0^a \overrightarrow{OM} \cdot y(x) \cdot dx$$

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \left| \begin{array}{l} \int_0^a x \cdot y(x) \cdot dx \\ \int_0^a y(x) \cdot y(x) \cdot dx \end{array} \right.$$

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \int_0^a x \cdot (\frac{-b}{a} x + b) \cdot dx \\ \int_0^a (\frac{-b}{a} x + b)^2 \cdot dx \end{vmatrix}$$

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \frac{b \cdot a^2}{6} \\ \frac{b^2 \cdot a}{3} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{2 \cdot b}{3} \end{vmatrix}$$

Question 5 : Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de surface associé

- *Coordonnée polaire/ $dS = rdrd\theta$*

Question 6 : Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire la surface étudiée

- *r∈ [0, R] / y∈ [0, 180°]*

Question 7 : Déterminer la surface du demi-disque par calcul intégral en fonction de R

$$S = \int_0^{\pi} \int_0^{R} r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$S = \int_0^{\pi} d\theta \cdot \int_0^{R} r \cdot dr$$

$$S = \pi \cdot \frac{R^2}{2}$$

Question 8 : Déterminer les coordonnées X et Y du centre géométrique du demi-disque en fonction de R.

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \int_0^{\pi} \int_0^{R} x \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \\ \int_0^{\pi} \int_0^{R} y \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \end{vmatrix}$$

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \cdot cos(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \\ \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \cdot sin(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \end{vmatrix}$$

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} \int_0^\pi cos(\theta) \cdot d\theta \cdot \int_0^R r^2 \cdot dr \\ \int_0^\pi sin(\theta) \cdot d\theta \cdot \int_0^R r^2 \cdot dr \end{vmatrix}$$

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{2 \cdot R^3}{3} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \end{vmatrix}$$

Exercice 2 : Vanne demi-lune

Question 1 : Déterminer l'expression de la surface élémentaire dS en fonction des variables r et θ, et donner les bornes de variation des variables r et θ.

$$dS = r \cdot d\theta \cdot dr$$

Question 2 : Soit $\overrightarrow{f_{M,eau \rightarrow vanne}}$ le vecteur représentant cette densité, exprimer ce vecteur en fonction des données et des variables z et θ.

$$\overrightarrow{f_{M,eau \rightarrow vanne}} = \rho \cdot g \cdot z \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \vec{x}$$

Question 3 : En intégrant sur les bons intervalles, déterminez la poussée (représentée par $\overrightarrow{R_{eau \rightarrow vanne}}$).

$$\overrightarrow{R_{eau \rightarrow vanne}} = \int_0^R \int_0^\pi \rho \cdot g \cdot z \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \vec{x}$$

$$\overrightarrow{R_{eau \rightarrow vanne}} = \rho \cdot g \cdot \int_0^R \int_0^\pi r \cdot sin\theta \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \vec{x}$$

$$\overrightarrow{R_{eau \rightarrow vanne}} = \rho \cdot g \cdot \int_0^R r^2 \cdot dr \cdot \int_0^\pi sin\theta \cdot d\theta \cdot \vec{x}$$

$$\overrightarrow{R_{eau \rightarrow vanne}} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{R^3}{3} \cdot \vec{x}$$

Question 4 : Calculer la position du centre de poussée C ; tel que $\overrightarrow{M_{C,eau \rightarrow vanne}} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{M_{C,eau \rightarrow vanne}} = \int_0^R \int_0^\pi (\overrightarrow{CM}) \wedge (\rho \cdot g \cdot z \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot \vec{x})$$

$$\overrightarrow{M_{C,eau \rightarrow vanne}} = \rho \cdot g \cdot \int_0^R \int_0^\pi \begin{vmatrix} -x_C \\ r \cdot cos\theta - y_C \\ r \cdot sin\theta - z_C \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot r^2 \cdot sin\theta \cdot d\theta \cdot dr$$

$$\overrightarrow{M_{C,eau\to vanne}} = \rho\cdot g\cdot\int_0^R\int_0^\pi \begin{vmatrix} 0 \\ r\cdot sin\theta - z_C \\ -r\cdot cos\theta + y_C \end{vmatrix} \cdot r^2\cdot sin\theta\cdot d\theta\cdot dr$$

$$\overrightarrow{M_{C,eau\to vanne}} = \rho\cdot g\cdot\int_0^R\int_0^\pi \begin{vmatrix} 0 \\ r\cdot sin\theta - z_C \\ -r\cdot cos\theta + y_C \end{vmatrix} \cdot r^2\cdot sin\theta\cdot d\theta\cdot dr = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \int_0^R\int_0^\pi (r\cdot sin\theta - z_C)\cdot r^2\cdot sin\theta\cdot d\theta\cdot dr \\ \int_0^R\int_0^\pi (-r\cdot cos\theta + y_C)\cdot r^2\cdot sin\theta\cdot d\theta\cdot dr \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\pi\cdot R}{8} - \frac{2\cdot z_C}{3} = 0 \\ \frac{2\cdot y_C}{3} = 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z_C = \frac{3\cdot\pi\cdot R}{16} \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : Frottement fluide sur un malaxeur « arc »

Question 1 : Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P,2/1}}$

- *Mouvement 2/1 : Rotation*

$$\overrightarrow{V_{P,2/1}} = x\cdot\omega\cdot\overrightarrow{y_2}$$

Question 2 : Exprimer la force élémentaire $\overrightarrow{dF_{fluide\to 2}}$ appliquée à un élément de longueur dx centré au point courant P.

$$\overrightarrow{dF_{fluide\to 2}} = -\mu\cdot x\cdot\omega\cdot dx\cdot\overrightarrow{y_2}\ \textit{sur AB et CD}$$

$$\overrightarrow{dF_{fluide\to 2}} = -\mu\cdot a\cdot\omega\cdot dz\cdot\overrightarrow{y_2}\ \textit{sur BC}$$

Question 3 : Déterminer le torseur $\{\boldsymbol{T}_{\text{fluide}\to\text{AB}}\}_{\boldsymbol{P}}$ modélisant l'action du fluide f sur la tige AB.

- *On calcule le torseur en A puis en P.*

$$\{T_{fluide\to AB}\}_A = \begin{Bmatrix} -\int_0^a \mu\cdot x\cdot\omega\cdot dx\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\int_0^a \mu\cdot x^2\cdot\omega\cdot dx\cdot\overrightarrow{z_2} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T_{fluide\to AB}\}_A = \begin{Bmatrix} -\frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega}{2}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\frac{\mu\cdot a^3\cdot\omega}{3}\cdot\overrightarrow{z_2} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T_{fluide\to AB}\}_P = \begin{Bmatrix} -\frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega}{2}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\frac{\mu\cdot a^3\cdot\omega}{3}\cdot\overrightarrow{z_2} - x\cdot\overrightarrow{x_2}\wedge -\frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega}{2}\cdot\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_P$$

$$\{T_{fluide\to AB}\}_P = \begin{Bmatrix} -\frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega}{2}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\frac{\mu\cdot a^3\cdot\omega}{3}\cdot\overrightarrow{z_2} + \frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot x}{2}\cdot\overrightarrow{z_2} \end{Bmatrix}_P$$

$$\{T_{fluide\to AB}\}_P = \begin{Bmatrix} -\frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega}{2}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ (\frac{\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot x}{2} - \frac{\mu\cdot a^3\cdot\omega}{3})\cdot\overrightarrow{z_2} \end{Bmatrix}_P$$

<u>Question 4 :</u> Déterminer le torseur $\{T_{\text{fluide}\to\text{BC}}\}_P$ modélisant l'action du fluide f sur la tige BC.

- *On calcule le torseur en B puis en P.*

$$\{T_{fluide\to BC}\}_B = \begin{Bmatrix} -\int_0^a \mu\cdot a\cdot\omega\cdot dz\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\int_0^a \mu\cdot a\cdot z\cdot\omega\cdot dz\cdot\overrightarrow{x_2} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{T_{fluide\to BC}\}_B = \begin{Bmatrix} -\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\mu\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\omega\cdot\overrightarrow{x_2} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{T_{fluide\to BC}\}_P = \begin{Bmatrix} -\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\mu\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\omega\cdot\overrightarrow{x_2} + ((a-x)\cdot\overrightarrow{x_2}\wedge(-\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot\overrightarrow{y_2}) \end{Bmatrix}_P$$

$$\{T_{fluide\to BC}\}_P = \begin{Bmatrix} -\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot\overrightarrow{y_2} \\ -\mu\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\omega\cdot\overrightarrow{x_2} - (a-x)\cdot\mu\cdot a^2\cdot\omega\cdot\overrightarrow{z_2}) \end{Bmatrix}_P$$

Question 5 : Déterminer le torseur $\{\boldsymbol{T}_{\text{fluide}\to 2}\}_{\boldsymbol{P}}$ modélisant l'action du fluide f sur l'arbre 2.

$$\{\boldsymbol{T}_{fluide\to AB}\}_{\boldsymbol{P}} = \{\boldsymbol{T}_{fluide\to CD}\}_{\boldsymbol{P}}$$

$$\{\boldsymbol{T}_{fluide\to 2}\}_{\boldsymbol{P}} = 2\cdot\{\boldsymbol{T}_{fluide\to AB}\}_{\boldsymbol{P}} + \{\boldsymbol{T}_{fluide\to BC}\}_{\boldsymbol{P}}$$