Séries

Numériques

CPGE
Brizeux
Quimper

Année 2021-2022

Analyse –1– (Chapitre 3)
Cours de Mathématiques
D. Zarouf – G. Le Bourhis
C.P.G.E Brizeux
PSI
Version compilée du 6 septembre 2021.

Table des matières

1 Ce qui a été vu en P.C.S.I. **3**
1.1 Définitions et exemples 3
1.2 Des Exemples Importants 4
1.2.1 Cas où on peut calculer la somme partielle : la série géométrique 4
1.2.2 Cas où on ne peut pas calculer la somme partielle 4
1.3 Premières propriétés 5
1.4 Relations entre suites et séries 6
1.4.1 Séries télescopiques 6
1.4.2 Étude d'une suite à partir d'une série 7
1.5 Les séries de réels à termes positifs 7
1.5.1 Convergence par majoration de la suite des sommes partielles et comparaison série et intégrale 7
1.5.2 Comparaison à une série à termes positifs 8
1.6 Absolue convergence 9
1.6.1 Définition-Propriété 9

2 Les compléments de P.S.I. **11**
2.1 Règle de D'Alembert 11
2.2 Produit de Cauchy de deux séries 12
2.3 La série Exponentielle 12

3 Séries alternées **13**

4 Formule de Stirling **15**

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Ce qui a été vu en P.C.S.I.

Dans ce paragraphe, on parcourt rapidement les définitions et propriétés vues en P.C.S.I . Les démonstrations sont rappelées pour la plupart : prenez le temps de les revoir à travers votre cours de première année et de compléter les démonstrations manquantes.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite numérique (c'est-à-dire $u_n \in \mathbb{K}$).

On pose, pour tout $N \geqslant p$, $\quad S_N = \sum_{n=p}^{N} u_n$.

La suite $(S_N)_{N \geqslant p}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, appelée, série de terme général u_n. On la note $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geqslant p} u_n$.

L'élément S_N de $\mathbb{K}$ est appelée $N^{\text{ième}}$ ***somme partielle de la série*** *$\sum_{n \geqslant p} u_n$.*

Étant donnée $\sum_{n \geqslant p} u_n$ une série numérique, on retrouve le terme général u_n à l'aide des sommes partielles par la relation : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Définition 2

Soit $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ une série numérique.

1. *On dit que $\sum_{n \geqslant p} u_n$* ***converge*** *ou est une série convergente (resp :* ***diverge*** *ou est une série divergente) lorsque la suite $(S_N)_{N \geqslant p}$ de ses sommes partielles* ***converge*** *(resp :* ***diverge****).*
2. *Lorsque $\sum_{n \geqslant p} u_n$ converge,*
   - *$\lim_{N \to +\infty} S_N$ est notée $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$, et appelée somme de la série.*
   - *$\forall N \geqslant p, R_N = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n - \sum_{n=p}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ est appelé* ***reste de la série*** *de rang N.*

Il ne faut pas confondre $\sum_{n \geqslant p} u_n$ qui désigne la série de terme général u_n (c'est-à-dire la suite $(S_N)_{N \geqslant p}$) et $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série et est un scalaire.

Définition 3

Étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence ou divergence, c'est-à-dire chercher si $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=p}^{N} u_n$ existe et est réelle, ou non.

On ne pourra pas toujours calculer S_N, alors l'objectif de ce chapitre est de donner des propriétés qui permettent de savoir si une série converge ou diverge sans avoir à calculer S_N

1.2 Des Exemples Importants

1.2.1 Cas où on peut calculer la somme partielle : la série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$.
On appelle série géométrique de raison q la série de terme général q^n.

Propriété 1

Soit $q \in \mathbb{C}$.
La série numérique $\sum_{n \geqslant p} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n = q^p \dfrac{1}{1-q}$.

Démonstration : Il suffit de se ramener à la somme d'une suite géométrique et d'utiliser, par passage à la limite que $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ à partir du moment où $|q| < 1$. ■

1.2.2 Cas où on ne peut pas calculer la somme partielle

☞ **1. Série Harmonique** :
On appelle série harmonique la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$.

Propriété 2

La série harmonique diverge.

Démonstration : La décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ nous garantit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Soit après sommation, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(N+1) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n}$. Comme le minorant tend vers $+\infty$, on en déduit que la série harmonique diverge. ■

☞ **2. Série Harmonique Alternée** :
On appelle série harmonique alternée la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Propriété 3

La série harmonique alternée converge et sa somme est égale à $-\ln 2$

Démonstration : Nous allons faire une démonstration qui consiste à se ramener à une intégrale, via une somme de Riemann.
À cette fin, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ et $R_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$ où $f : \mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$. La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit des sommes de Riemann de la fonction continue f sur l'intervalle $[1;2]$. Elle converge donc vers $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2)$. On a en outre $R_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n+2}$ et $R_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. Ce qui nous permet d'écrire $\dfrac{1}{n+1} + R_{n+1} = R_n + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2}$, soit $R_{n+1} = R_n + \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)}$. Or $U_{2n+1} = U_{2n-1} - \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} = U_{2n-1} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.
Si l'on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = U_{2n-1}$, on voit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfont une même relation de récurrence. De plus, $u_1 = R_1 = \dfrac{1}{2}$. Étant initialisées pareillement, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc égales. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} U_{2n-1} = \ln(2)$.
Mais $U_{2n} = U_{2n-1} + \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)}$, donc $\lim_{n \to +\infty} U_{2n} = \ln(2)$. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, opposée de la suite des sommes partielles de série harmonique alternée, converge vers $\ln(2)$.
Autre démonstration : *(plus classique)*
Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k + \dfrac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$. Soit, après une intégration (entre 0 et 1) et un réarrangement : $\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^n}{n+1} =$

$(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. On en déduit que $\left|\ln(2)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t$, soit finalement $\left|\ln(2)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+2}$.
En passant à la limite lorsque $n\to+\infty$, on en déduit le résultat. ■

☞ **3. Série exponentielle** :

On appelle série exponentielle toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ où $x\in\mathbb{R}$.

Propriété 4

$\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme est égale à e^x

Démonstration : On a $\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{e}^t(x-t)^n\,\mathrm{d}t$ (en utilisant le développement de Taylor de $\exp : \mathbb{R}\ni x\mapsto \mathrm{e}^x\in\mathbb{R}$ en 0 à l'ordre n avec reste intégral). On a donc la majoration $\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x$. Mais pour x fixé, on a $x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n!)$. On en déduit le résultat. ■

1.3 Premières propriétés

Propriété 5

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Cette propriété nous permet de dire que les séries $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum_{n\geqslant p}v_n$ où $\forall n\geqslant p, u_n=v_n$ ont même nature.
C'est pourquoi, dans la suite de ce chapitre, les propriétés sont énoncées avec des séries de terme général u_n défini pour $n\geqslant 0$.

Propriété 6 (*Condition nécessaire de convergence*)

Si $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge, alors :

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
2. *$(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 où $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.*

Démonstration : On note $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. On note $\ell=\lim_{n\to+\infty}S_n$ la limité réelle, valeur de la série convergente.

1. On a $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\ell-\ell=0$.
2. On a $R_n=\ell-S_n$. Il est donc évident que $\lim_{n\to+\infty}R_n=0$. ■

La réciproque à cette propriété est fausse, le contre-exemple par excellence est :
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, alors que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge
La contraposée de cette propriété est : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $0 \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 4

Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ***diverge grossièrement****.*

Propriété 7

Si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(u_n)_n,(v_n)_n$ deux suites numériques, on définit la série $\lambda\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n+\mu\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ par la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(\lambda u_n+\mu v_n)$.

L'ensemble des séries est alors un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et l'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel $\mathscr{C}$ de l'espace vectoriel des séries.

Enfin,

$$S:\begin{array}{ccc}\mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ \text{série }\sum u_n=\left(\sum\limits_{k=0}^{n}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k\end{array}$$

est une application linéaire de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{K}$ (On dit que S est une forme linéaire sur $\mathscr{C}$).

Démonstration : On revient aux suites des sommes partielles et on utilise les propriétés sur les suites convergentes. ■

Propriété 8

Soit une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ à termes complexes.

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent.}$$

Dans le cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n)+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n)$$

Démonstration : on revient aux suites des sommes partielles et on utilise les propriétés sur les suites convergentes. ■

Application : C.N.S. sur $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ pour que $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n\cos(n\theta)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n\sin(n\theta)$ convergent puis dans le cas de convergence, calculer la somme.

1.4 Relations entre suites et séries

1.4.1 Séries télescopiques

L'étude d'une série est plus facile lorsqu'il est possible de calculer explicitement ses sommes partielles. C'est le cas en particulier **des séries télescopiques** c'est-à-dire les séries dont le terme général peut s'écrire sous la forme $f(n+1)-f(n)$, car alors :

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N}(f(n+1)-f(n))\\ &= \sum_{n=0}^{N}f(n+1)-\sum_{n=0}^{N}f(n)\\ &= \sum_{n=1}^{N+1}f(n)-\sum_{n=0}^{N}f(n)\\ &= f(N+1)-f(0)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 0}(f(n+1)-f(n)) \text{ converge si et seulement si } \big(f(n)\big)_n \text{ converge.}$$

$$\text{Et } \sum_{n=0}^{+\infty}(f(n+1)-f(n))=\lim_{n\to+\infty}f(n)-f(0)$$

Exemples : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{N+1}-1$, qui diverge lorsque $N \to +\infty$...
Certaines décompositions en éléments simples débouchent parfois sur des sommes télescopiques et ainsi permettent de calculer la somme d'une série convergente : $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$. *Sachant que* $\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$...

1.4.2 Étude d'une suite à partir d'une série

Parfois, pour étudier la nature d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on est amené à étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$, car la suite des sommes partielles de cette série n'est autre que $(u_n+u_0)_n$.

En effet, $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_0$.

Un exemple à retenir : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge où $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1.5 Les séries de réels à termes positifs

Définition 5

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes* ***réels****.*

On dit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est une série* ***à termes positifs*** *lorsque, il existe un rang p tel que :* $\forall n \geqslant p, u_n \geqslant 0$.

i. Dans la suite de ce paragraphe, on supposera que $p=0$ (aucune importance car deux séries différentes seulement d'un nombre fini de termes ont même nature).

ii. Par multiplication par -1 d'une série , on ne modifie pas la nature d'une série, donc tout ce qui suit dans ce paragraphe est valable pour les séries dont le signe de ses termes est constant à partir d'un certain rang.

1.5.1 Convergence par majoration de la suite des sommes partielles et comparaison série et intégrale

Théorème 1

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes* ***réels positifs****.*

On pose : $\forall N, S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge si et seulement si } (S_N)_N \text{ est majorée.}$$

Corollaire 1 (*Théorème de comparaison d'une série et d'une intégrale*)

Soit f une application de $[a,+\infty[$ ($a\in\mathbb{R}_+$), continue, ***positive et décroissante****. Alors la série de terme général $u_n = f(n)$ converge si et seulement si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite réelle en $+\infty$.*

Applications :

☞ **a. Les séries de Riemann** :

Définition 6

On appelle ***série de Riemann****, toute série de la forme* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Propriété 9

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si et seulement si* $\alpha>1$.

Démonstration : Pour $\alpha>0$, la fonction $f_{\alpha}:[1;+\infty[\ni x\mapsto\frac{1}{x^{\alpha}}\in\mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante, on peut appliquer le corollaire précédent. Sachant que $\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha\neq 1\\ \ln(x) & \text{si } \alpha=1\end{cases}$, cette intégrale admet une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha>1$. On en déduit que la série converge si et seulement si $\alpha>1$.
Si $\alpha\leqslant 0$, la série diverge grossièrement. ■

☞ **b.** Les **séries de Bertrand** du type $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}},\beta\in\mathbb{R}$.

1.5.2 Comparaison à une série à termes positifs

a. Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 2

Soient $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ *une série à termes* ***réels positifs****.* ***On suppose*** $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N,0\leqslant u_n\leqslant v_n$.

Alors,

1. $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ *converge* $\Longrightarrow\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *converge.*
2. $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *diverge* $\Longrightarrow\sum_{n\geqslant 0}v_n$ *diverge.*

b. Utilisation du O et o

Propriété 10

Soient $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *2 séries à termes positifs.*

On suppose $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ *convergente et* $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}(v_n)$ *(ou* $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}(v_n)$*).*

Alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *est convergente.*

Corollaire 2 (*Le « coup du* α *»*)

Soient $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *une série à termes positifs telle qu'il existe* $\alpha>1$ *tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\alpha}u_n=0$$

Alors $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *est convergente.*

Démonstration : Vu la condition, on a $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, comme $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ est une série de Riemann convergente, la série de terme général u_n converge. ■

Propriété 11

Soient $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *deux séries à termes positifs.*
On suppose $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *divergente et* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ *(ou* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$*).*
Alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *est divergente.*

Corollaire 3 (*Le « coup du* α *»*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs telle qu'il existe* $\alpha \leqslant 1$ *tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} u_n = +\infty$$

Alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*

Démonstration : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ n^{\alpha} u_n \geqslant 1$. Donc $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. Cela illustre le fait que $\dfrac{1}{n^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(u_n)$ en observant que $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente, on en déduit le corollaire. ■

c. Utilisation de l'équivalent

Propriété 12

Soient $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *deux séries à* ***termes positifs****.*
On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$*. Alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *sont de même nature.*

Exemples : On considère les séries de terme général :

1. $\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)}{\ln(n)}$;
2. $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(n^2\right)$;
3. $\arccos\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)$.

1.6 Absolue convergence

1.6.1 Définition-Propriété

Définition 7

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série numérique. On dit* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente lorsque* $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ *converge.*

Remarque

Lorsque, à partir d'un certain rang, tous les termes u_n *sont positifs,* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente si et seulement si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*

Propriété 13

1. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*

2. *La réciproque du 1 est fausse .*

3. *Soient* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *deux séries absolument convergentes, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ *est absolument convergente et*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| + \sum_{n=0}^{\infty}|v_n|$$

Démonstration : 1. Démonstration admise.

2. On a vu que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge alors que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge. *Ce sera l'exemple de référence à citer pour justifier que cette réciproque est fausse.*

3. L'inégalité triangulaire appliquées aux sommes finies ainsi que le théorème de la limite monotone nous garantissent que $\forall N\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N}(u_n+v_n)\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N}|u_n+v_n| & (1)\\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N}|u_n| + \sum_{n=0}^{N}|v_n| & (2)\\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|, & (3)
\end{aligned}$$

nous permettant de voir que la suite croissante en N du membre de droite de (1) converge, et ainsi que la série de terme général u_n+v_n est absolument convergente. Un passage à la limite dans l'inégalité (1) nous permet de conclure. ■

Propriété 14

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *une série à* ***termes positifs*** *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes complexes.*

On suppose $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *convergente et* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ *(ou* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$*).*

Alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente.*

Démonstration : On a $|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ (ou $|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$), la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|u_n|$ converge (en utilisant « le coup du α » dans le cas des séries à termes positifs)… ■

Corollaire 4 (*Le « coup du* α *»*)

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes complexes telle qu'il existe* $\alpha>1$ *tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = 0$$

Alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente.*

2 Les compléments de P.S.I.

2.1 Règle de D'Alembert

Théorème 3 (*Règle de D'Alembert*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs .

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on la note ℓ.

Alors,

- ☞ *Si $\ell < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.*
- ☞ *Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.*
- ☞ *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.*

Démonstration : Pour chaque cas :

1. On suppose $\ell < 1$. En écrivant la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, on obtient
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$$
Puisque $\ell < 1$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $0 < q = \ell + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$)
Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant q u_n$.
Par cascade, on obtient $\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant q^{n-N} u_N$.
$q \in [0,1[\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} q^{n-N} u_N$ converge et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
2. On suppose $\ell > 1$. En écrivant la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, on obtient
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$$
Puisque $\ell > 1$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $q = \ell - \varepsilon > 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$)
Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_{n+1} \geqslant q u_n$.
Par cascade, on obtient $\forall n \geqslant N, u_n \geqslant q^{n-N} u_N$.
$q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^{n-N} u_N = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, en particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, d'où la divergence grossière de $\sum u_n$.
3. Avec $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\ell = 1$ et $\sum u_n$ diverge.
Avec $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\ell = 1$ et $\sum u_n$ converge.
Ces deux exemples montrent que le cas $\ell = 1$ ne nous permet pas de conclure sur la nature de $\sum u_n$. ■

a. De la démonstration, on retiendra que l'on compare la série à une série géométrique ce qui peut nous faire rappeler les conditions de ℓ par rapport à 1.

b. Cette règle ne s'utilise que lorsqu'on peut savoir $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

c. Cette règle s'applique bien lorsque u_n comporte des produits et quotients en factorielle.

Exemples : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{1000}}{\sqrt{n!}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!a^n}{n^n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 8 (*Produit de Cauchy*)

On appelle ***produit de Cauchy des séries*** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ***et*** $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ *où*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}\, v_k$$

Propriété 15

Soient deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ***absolument convergentes.***

Alors la série produit de Cauchy est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration : admise. ■

Exemple : Calculer la série $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$ lorsque $|x| < 1$ en utilisant un produit de Cauchy.

2.3 La série Exponentielle

Propriété 16

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente.*

Démonstration : ☞ *Démonstration manuscrite n^o 1.* ■

Définition 9 (*Série exponentielle*)

On appelle série exponentielle toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ *où* $z \in \mathbb{C}$.

Elle converge et sa somme est notée e^z.

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

On a déjà démontré que pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Propriété 17

1. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

2. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

Démonstration : ☞ *Démonstration manuscrite n^o 2.* ■

3 Séries alternées

Définition 10

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes réels.*

On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est une série alternée lorsque la suite* $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels de signe constant, autrement dit le terme général* u_n *est de la forme* $u_n = (-1)^n a_n$ *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels de signe constant.*

Exemples :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée.
2. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est une série alternée.
3. $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ n'est pas une série alternée.

Théorème 4 (*Critère Spécial des Séries Alternées (C.S.S.A.)*)

On considère une série alternée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

On suppose :

1. $(|u_n|)_n$ *décroissante.*

2. $(|u_n|)_n$ *converge vers 0.*

Alors : $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*

Démonstration : ☞ *Démonstration manuscrite n^o 3.* ■

Exemples :

1. On a vu que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge vers $\ln(2)$;

2. la série de Gregory-Leibniz $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge vers $\frac{\pi}{4}$;

3. la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge sans converger absolument ;

4. Étudier la convergence de la série $\eta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ et exprimer une relation entre $\eta(x)$ et $\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ lorsque $x > 1$.

Théorème 5 (*Encadrement de la somme d'une série alternée*)

On considère une série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ***vérifiant le C.S.S.A.***.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.*

Plus précisément :

1. *Si* $u_n = (-1)^n a_n$ *où* $a_n > 0$, $\forall N \in \mathbb{N},\ S_{2N+1} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant S_{2N}$.
2. *Si* $u_n = (-1)^n a_n$ *où* $a_n < 0$, $\forall N \in \mathbb{N}, S_{2N} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant S_{2N+1}$ *où* $\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$.

Théorème 6

Signe et Majoration de la somme et du reste d'une série alternée

On considère une série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ***vérifiant le C.S.S.A.***.

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est du signe de son premier terme non nul* u_p *et* $|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n| \leqslant |u_p|$.
2. $\forall N \geqslant 0, R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ *est du signe de son premier terme* u_{N+1} *et* $|R_N| \leqslant |u_{N+1}|$.

Démonstration : 2. On a $R_N = S - S_N$

Soit N pair : Posons $N = 2p$.

Notre but ici : On veut montrer que $R_{2p} = S - S_{2p}$ est du signe de $u_{2p+1} = -a_{2p+1}$ donc négatif, et $|R_{2p}| \leqslant |u_{2p+1}|$, autrement dit $-R_{2p} \leqslant a_{2p+1}$.

Or, d'après l'encadrement de S par les sommes partielles, on a : $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$, d'où $S - S_{2p} \leqslant 0$, ce qui montre que R_{2p} est négatif, c'est-à-dire bien du signe de son premier terme u_{2p+1}.

D'autre part, $S_{2p+1} \leqslant S$ implique $S_{2p+1} - S_{2p} \leqslant R_{2p}$, c'est-à-dire $u_{2p+1} \leqslant R_{2p}$, ce qui donne $|R_{2p}| \leqslant |u_{2p+1}|$, puisque $|R_{2p}| = -R_{2p}$ et $|u_{2p+1}| = -u_{2p+1}$

Soit N impair : Posons $N = 2p+1$.

But : On veut montrer que $R_{2p+1} = S - S_{2p+1}$ est du signe de $u_{2p+2} = a_{2p+2}$ donc positif, et $|R_{2p+1}| \leqslant |u_{2p+2}|$, autrement dit $R_{2p+1} \leqslant a_{2p+2}$

Or, d'après l'encadrement de S par les sommes partielles, on a : $S_{2p+1} \leqslant S$ et $S \leqslant S_{2p+2}$ (car S est limite de la suite croissante donc un majorant de $(S_{2N})_N$), d'où $S - S_{2p+1} \geqslant 0$, ce qui montre que R_{2p+1} est positif, c'est-à-dire bien du signe de son premier terme u_{2p+2}.

D'autre part, $S \leqslant S_{2p+2}$ implique $S - S_{2p+1} \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} = u_{2p+2}$, c'est-à-dire $R_{2p+1} \leqslant u_{2p+2}$, ce qui donne $|R_{2p+1}| \leqslant |u_{2p+2}|$ puisque $|R_{2p+1}| = R_{2p+1}$ et $|u_{2p+2}| = u_{2p+2}$ ■

Exemples d'application :

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. Cela permet notamment d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

4 Formule de Stirling

Lemme (*Intégrales de Wallis*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors :

1. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
2. $\forall n, I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
3. $\forall n, I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\forall n, (n+1) I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
5. $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$

Démonstration : ☞ *Démonstration manuscrite n° 4.* ■

Propriété 18 (*Formule de Stirling*)

On dispose d'un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$:

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration : ☞ *Démonstration manuscrite n° 5.* ■

Exemples :

1. On se fixe un réel strictement positif a. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^{an}}{(n!)^a \mathrm{e}^{an}}$ en utilisant la règle d'Alembert puis la formule de Stirling. Comparer.
2. Soit $\rho \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\rho^n$.