

Chap 2. Retroactions

TD pour aller plus loin

Exercice 1 :

1) D'après la loi des nœuds à l'entrée non-inverseuse, avec $i^+ = 0$:

$$\frac{e - v^+}{R_1} = i^+ + \frac{v^+ - s}{R_2} \Rightarrow v^+ = \frac{R_2 e + R_1 s}{R_1 + R_2}.$$

Commutation quand (s passe de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$ et *vice versa*) quand $\varepsilon = v^+ - v^-$ passe par 0. La sortie de l'amplificateur opérationnel vaut $s = \pm V_{sat}$:

$\varepsilon = \frac{R_2 e + R_1 s}{R_1 + R_2} - V_0 = 0$,
donc $e = (1 + \alpha) V_0 \mp \alpha V_{sat}$. On en déduit le cycle d'hystérésis, que V_0 sert à décaler.

2) On propose l'intégrateur ci-contre, pour lequel $\frac{E}{S} = -\frac{1}{RCp}$.

3) Le montage bouclé est un oscillateur à relaxation. L'origine des dates est prise lors d'une commutation de s de $-V_{sat}$ à V_{sat} . La tension s oscille entre $-V_{sat}$ et V_{sat} .

Quant à e , on lit sur le cycle d'hystérésis qu'elle varie entre $(1 + \alpha) V_0 - \alpha V_{sat}$ et $(1 + \alpha) V_0 + \alpha V_{sat}$.

Pour la période, on part de la transmittance de l'intégrateur, $RCpE = -S$, qui implique :

$$RC \int_0^{T/2} \frac{de}{dt} dt = - \int_0^{T/2} s(t) dt = - \int_0^{T/2} V_{sat} dt,$$

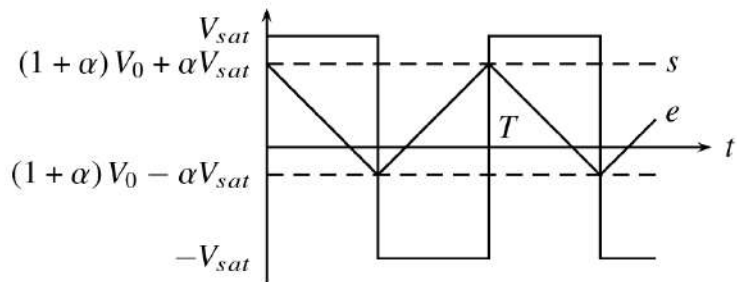
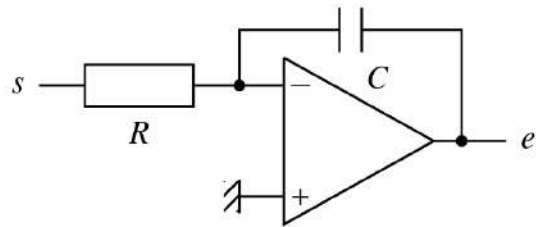
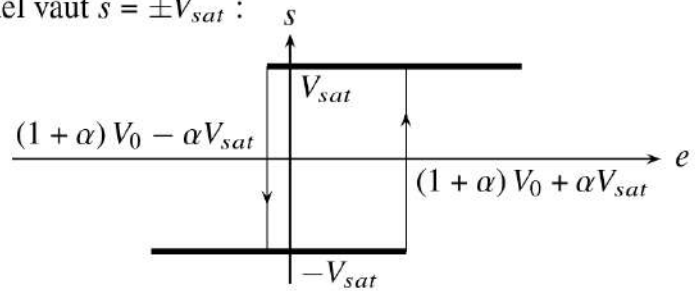
soit :

$$RC \left(e \left(\frac{T}{2} \right) - e(0) \right) = -\frac{T}{2} V_{sat} \Rightarrow -2RC\alpha V_{sat} = -\frac{T}{2} V_{sat} \Rightarrow T = 4\alpha RC.$$

4) e est la sortie d'un AO et ne peut dépasser $\pm V_{sat}$. Donc :

$$\begin{cases} (1 + \alpha) V_0 + \alpha V_{sat} < V_{sat} \Rightarrow V_0 < \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} V_{sat} \\ (1 + \alpha) V_0 - \alpha V_{sat} > -V_{sat} \Rightarrow V_0 > -\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} V_{sat} \end{cases}$$

Cet encadrement n'est possible que si $\alpha < 1$.



Exercice 2 : Filtre accentuateur

1) Amplificateur opérationnel rétroactionné sur son entrée inverseuse.

2) D'après la formule du diviseur de tension, $\frac{V^-}{S} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 p}}{R_1 + \frac{1}{C_1 p} + R_2}$. Avec un amplificateur opérationnel idéal, $E = V^+ = V^-$. Ainsi $H(p) = \frac{1 + (R_1 + R_2) C p}{1 + R_1 C p}$.

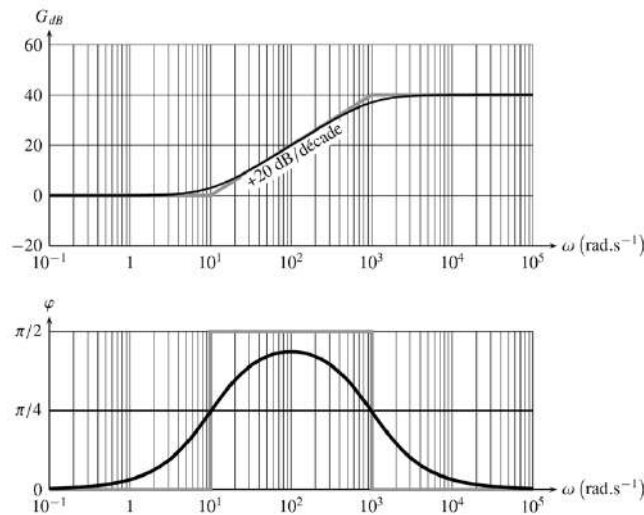
3) Deux constantes de temps donc deux pulsations caractéristiques $\omega_0 = \frac{1}{(R_1 + R_2) C}$ et $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C} > \omega_0$. On simplifie la transmittance :

	$\omega \ll \frac{1}{(R_1 + R_2) C}$	$\frac{1}{(R_1 + R_2) C} \ll \omega \ll \frac{1}{R_1 C}$	$\frac{1}{R_1 C} \ll \omega$
$Num(p) \simeq$	1	$(R_1 + R_2) C p$	$(R_1 + R_2) C$
$Dénom(p) \simeq$	1	1	$R_1 C p$
$H(p) \simeq$	1	$(R_1 + R_2) C p$	$1 + \frac{R_2}{R_1}$
phase	0	$\frac{\pi}{2}$	0
pente	0	+20 dB/décade	0

$$20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 20 \log \left(\frac{(R_1 + R_2) C}{R_1 C} \right) = 20 \log (10^2) = 40 \text{ dB}.$$

Les asymptotes sont en gris sur les diagrammes page suivante. Attendu l'étroitesse de la zone asymptotique à $\pi/2$, la phase ne parvient pas à son expression asymptotique.

Le montage accentue les pulsations $\omega \gg \frac{1}{R_1 C}$ en les multipliant par 100.



4) L'entrée est composée de deux signaux, l'un à la pulsation nulle, l'autre à $\omega_e = 2\pi f_e$, soit $\omega_e = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \gg 1/R_1 C$:

$$\underline{s}(t) = \underbrace{H(j0)}_1 E_0 + \underbrace{H(j\omega_e)}_{100} E_0 e^{j\omega_e t} \Rightarrow s(t) = E_0 + 100 E_1 \cos(2\pi f_e t).$$

5) a. On utilise les valeurs des amplitudes des signaux. Avec les signaux complexes $\underline{s}(t) = S_0 \exp(j\omega t + \varphi)$ et $\underline{e}(t) = E_0 \exp(j\omega t)$: $\underline{s}(t) = \underline{H}(j\omega) \underline{e}$, soit :

$$S_0 \exp(j\omega t + \varphi) = \sqrt{\frac{1 + ((R_1 + R_2) C \omega)^2}{1 + (R_1 C \omega)^2}} \exp(j \arg H(j\omega)) \times E_0 \exp(j\omega t),$$

donc le module est $S_0 = \sqrt{\frac{1 + (R_1 C \omega + R_2 C \omega)^2}{1 + (R_1 C \omega)^2}} E_0$. On observe sur l'oscilloscope :

$\omega = 2\pi \times 30 \text{ rad.s}^{-1}$, $E_0 = 100 \text{ mV}$ et $S_0 = 1,78 \text{ V}$ (le crête-à-crête est le double de l'amplitude). Avec $R_1 C = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, on trouve : $R_2 C = 9,50 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

b. Écrivons que la sortie est déphasée d'un angle φ par rapport à l'entrée : si $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ alors $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. La sortie s'écrit aussi :

$$s(t) = S_0 \cos \left(\omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right) = S_0 \cos(\omega(t + \Delta t)).$$

Le déphasage φ correspond à un décalage temporel Δt tel que : $\varphi = \omega \Delta t = 1,3 \text{ rad}$.

Autre méthode, avec une règle de proportionnalité :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{f} \longleftrightarrow 2\pi \\ \Delta t \longleftrightarrow \varphi \end{cases} \Rightarrow \varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 1,3 \text{ rad}.$$

Le signal e (en gris) est en retard sur le signal s (en noir) car il passe après par 0.

c. $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + (R_1 + R_2)Cp}{1 + R_1Cp}$ donc $(1 + R_1Cp)S(p) = (1 + (R_1 + R_2)Cp)E(p)$. D'où

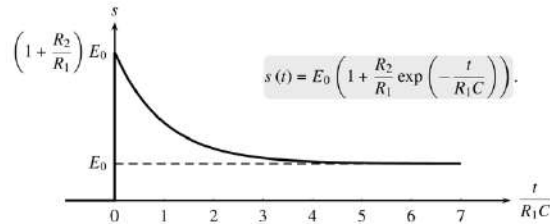
l'équation différentielle $R_1C \frac{ds}{dt} + s = (R_1 + R_2)C \frac{de}{dt} + e$, qui devient, pour $t > 0$ où $e(t) = E_0$:

$$R_1C \frac{ds}{dt} + s = E_0 \Rightarrow s(t) = E_0 + \lambda \exp\left(-\frac{t}{R_1C}\right).$$

D'après le théorème de la valeur initiale, en sachant que pour un échelon de hauteur E_0 , $E(p) = \frac{E_0}{p}$:

$$s(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pH(p)E(p) = H(\infty)E_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}E_0 = E_0 + \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{R_2}{R_1}E_0.$$

Finalement :



Le signal de sortie de l'amplificateur opérationnel vaut $10^2 E_0$ en $t = 0^+$. Afin qu'il ne sature pas, il convient de garder :

$$10^2 E_0 < V_{SAT} \Rightarrow E_0 < \frac{V_{SAT}}{10^2} = 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ V}.$$

6) a. $S(p) = A_d(p)E(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p}E(p)$, où $A_0 = 2 \cdot 10^3$ et $\tau \approx 10^{-2} \text{ s}$.

b. $S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p}(V^+(p) - V^-(p))$ donc :

$$S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \left(E(p) - \frac{1 + R_1Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp} S(p) \right).$$

$$S(p) \left(1 + A_0 + (\tau + R_1C + R_2C + A_0R_1C)p + (R_1 + R_2)C\tau p^2 \right) = A_0(1 + (R_1 + R_2)Cp)E(p),$$

Attendu que $1 \ll A_0$ et $(\tau = 10^{-2} \text{ s}, R_1C = 10^{-3} \text{ s}, R_2C = 10^{-1} \text{ s}) \ll A_0R_1C = 10^2 \text{ s}$:

$$S(p)(A_0 + A_0R_1Cp + (R_1 + R_2)C\tau p^2) = A_0(1 + (R_1 + R_2)Cp)E(p),$$

$$S(p) \left(1 + R_1Cp + \frac{(R_1 + R_2)C\tau}{A_0}p^2 \right) = (1 + (R_1 + R_2)Cp)E(p),$$

qui se factorise en :

$$S(p)(1 + R_1Cp) \left(1 + \frac{(R_1 + R_2)\tau}{R_1A_0}p \right) = (1 + (R_1 + R_2)Cp)E(p),$$

car en effet, quand on développe, le terme en p est :

$$\underbrace{R_1C}_{10^{-3} \text{ s}} + \underbrace{\frac{(R_1 + R_2)\tau}{R_1A_0}}_{5 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = R_1C.$$

Finalement : $H(p) = \frac{1 + (R_1 + R_2)Cp}{(1 + R_1Cp) \left(1 + \frac{(R_1 + R_2)\tau}{R_1A_0}p \right)}$.

c. Lors d'un essai indicatif, $s(0^+) = H(\infty)E_0 = 0$ et la sortie reste continue en $t = 0$.

d. $\frac{ds}{dt}(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p(pS(p) - s(0^+)) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2H(p)\frac{E_0}{p} = \frac{A_0}{\tau}E_0.$

Numériquement, $\frac{ds}{dt}(0^+) = 2 \cdot 10^7 E_0 \text{ (V.s}^{-1}\text{)}$: la pente est très élevée, la montée de 0 à $\frac{R_2}{R_1}E_0$ s'effectue en une durée très brève, on a l'impression visuelle de garder un signal discontinu.

Exercice 3 : Dérivateur réel

1) La fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel est $A_d(p) = \frac{S(p)}{\mathcal{E}(p)} = \frac{A_0}{1 + \tau p}$, où $\mathcal{E}(p) = V^+(p) - V^-(p) = -V^-(p)$. Il faut recalculer $V^-(p)$ car avec un amplificateur réel,

$V^+(p) \neq V^-(p)$:

$$Cp(E - V^-) = \frac{V^- - S}{R} \Rightarrow (1 + RCp)V^- = RCpE + S \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{RCpE + S}{1 + RCp}.$$

$$\text{Alors : } S = -\frac{A_0}{1 + \tau p} \frac{RCpE + S}{1 + RCp} \Rightarrow (1 + \tau p)(1 + RCp)S = -A_0RCpE - A_0S.$$

$$\text{On en tire, avec } A_0 \gg 1 : (\underbrace{1 + A_0}_{= A_0} + (\tau + RC)p + \tau RCp^2)S = -RCpE.$$

En divisant chaque terme par A_0 : $H(p) = \frac{-RCp}{1 + \frac{RC + \tau}{A_0}p + \frac{RC\tau}{A_0}p^2}$. On reconnaît un passe-

bande d'ordre deux. De plus, si $A_0 \rightarrow \infty$, alors on tend vers $H(p) = -RCp$, qui est la fonction de transfert dans le cas idéal.

2) a. Le système ne laisse pas passer les hautes fréquences, car $H(\infty) = 0$; il est donc impossible d'obtenir de brusques variations en sortie. La sortie est donc adoucie.

b. Le passe-bande, dont la fonction de transfert s'écrit $H(p) = H_0 \frac{2\xi \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$ sous

forme canonique, est centré sur la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{A_0}{RC\tau}}$. C'est cette pulsation qui est la plus amplifiée et qui se voit, s'il y a résonance. C'est le cas si le coefficient d'amortissement ξ est faible, c'est-à-dire $\xi < 1$. Or $\frac{RC + \tau}{A_0} = \frac{2\xi}{\omega_0}$ donc $\xi = \frac{RC + \tau}{2\sqrt{A_0RC\tau}} < 1$.

De plus, pour que la pulsation soit amplifiée, il faut qu'elle existe, c'est-à-dire qu'une harmonique à ω_0 existe dans le spectre de e . Or les harmoniques sont de pulsation multiple de celle du fondamental, $2\pi/T$. Il faut donc qu'il existe un entier n tel que $n2\pi/T \simeq \omega_0$.

Exercice 4 : Filtrage d'un signal en créneau

1) C'est un passe-bande, de transmittance canonique $H(p) = -H_0 \frac{2\xi \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$, donc

de pulsation caractéristique $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{RR'C^2}}$. La transmittance est maximum en ω_0 et vaut $H(\omega_0) = -\frac{R'}{2R}$ car $\frac{1}{2}RR'C^2 p^2 = -1$ pour $p = j\omega_0$; d'où un gain de dB de $20 \log \left(\frac{R'}{2R}\right)$. On en déduit $\omega_0 = \omega_A = 4,25 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et :

$$G_{dB}(A) = 28,0 = 20 \log \left(\frac{R'}{2R}\right) \quad \text{soit} \quad R' = 50,2 R = 50,2 \text{ k}\Omega.$$

On simplifie la transmittance dans le tableau asymptotique ci-dessous ; on y lit directement les valeurs des pentes et des phases des deux segments rectilignes.

Les asymptotes se croisent en $\omega_0 = \omega_B = 4,25 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. Pour y connaître le gain, on remplace p par $j\omega_0$ dans une des deux expressions limites, par exemple :

$$-\frac{1}{2}R'Cj\omega_0 = -j\sqrt{\frac{R'}{2R}} \quad \text{d'où un gain en dB de } 20 \log \left| -j\sqrt{\frac{R'}{2R}} \right| = 10 \log \left(\frac{R'}{2R}\right).$$

On obtient le même résultat que précédemment :

$$G_{dB}(B) = 14,0 = 10 \log \left(\frac{R'}{2R}\right),$$

soit $R' = 50,2 R$.

Puis, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{RR'C^2}}$,
 $\omega_0 = 4,25 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$:
 $C = 47 \text{ nF}$.

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega_0 \ll \omega$
Dénom(p) $\simeq$	1	$\frac{1}{2}RR'C^2 p^2$
$H(p) \simeq$	$-\frac{1}{2}R'Cp$	$-\frac{1}{RCp}$
phase	$-\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$	$-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$
pente	+20 dB/décade	-20 dB/décade

2) Le signal créneau se décompose en série de Fourier : $e(t) = \langle e \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n)$,

où $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$. Y a-t-il une harmonique qui soit de pulsation ω_0 ? Il faut alors qu'il existe un entier n tel que $n\frac{2\pi}{T_e} = \omega_0$, soit $n = 3,0$. L'harmonique 3 passe à travers le filtre avec un gain $H(3\omega_e) = H(\omega_0) = -25$, alors que la valeur moyenne (composante de pulsation nulle), le fondamental et toutes les autres harmoniques sont absorbées. Cette harmonique s'écrit $e_3(t) = \frac{4E_0}{\pi} \times \frac{1}{3} \sin(3\omega_e t)$. Il ne reste donc en sortie que $s(t) = -\frac{100E_0}{3\pi} \sin(3\omega_e t)$.

Exercice 5 : capacité réglable

On veut montrer que le montage équivaut à un condensateur : ce n'est donc pas une fonction de transfert qui nous intéresse ici, mais l'impédance d'entrée du montage. Concrètement, on cherche donc à établir une relation entre i et u qui soit celle d'un condensateur, soit

$$u = \frac{1}{jC\omega} i.$$

On note v_1 et v_2 les tensions de sortie des deux ALI, qui fonctionnent tous les deux en régime linéaire. Le premier ALI est un suiveur donc $v_1 = u$. La LNP à l'entrée $\ominus$ de l'ALI $\otimes$, combinée avec l'hypothèse de fonctionnement linéaire, donne

$$\frac{v_1 - 0}{\alpha R} + \frac{v_2 - 0}{(1 - \alpha R)} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} u.$$

Enfin, comme l'ALI $\oplus$ est idéal, alors les courants de polarisation sont nuls. Le courant i est donc également celui qui traverse le condensateur. En convention récepteur, on a donc

$$i = jC_0\omega(u - v_2)$$

En remplaçant l'expression de v_2 ,

$$i = j \frac{C_0}{\alpha} \omega u \quad \text{d'où} \quad \boxed{C = \frac{C_0}{\alpha}}.$$

L'intérêt du montage est qu'il est très simple de faire varier α (il suffit de faire tourner le curseur d'un potentiomètre) pour adapter la capacité à la volonté, ce qui est infiniment (et même plus !) plus simple que de changer le condensateur du montage.