Déroulé de l'épreuve :

- 30 minutes de préparation sur l'exercice majeur, suivies de 20 minutes d'interrogation
- Puis 10 minutes sur un exercice mineur, parfois dicté par l'examinateur, sans aucune préparation.

I. Enoncés

Exercice mineur 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$

Montrer que J_n existe.
Montrer que la suite (J_n) converge.

Exercice mineur 2

Soient $\omega = \exp(2\mathbf{i}\pi/7)$, $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
Calculer $S + T$ et $S\,T$, puis en déduire S et T.

Exercice mineur 3

Résoudre l'équation différentielle :

$$(x^2 - 1)y'' - 6y = 0.$$

Exercice mineur 4

Soit a appartenant à $\mathbb{R}$, $S_a = \left\{f \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(a-x) \text{ et } f(0) = 0\right\}$

1. Montrer que si f appartient à S_a alors f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
2. Déterminer S_a.

Exercice mineur 5

Soit E un espace euclidien. Soient a et b des vecteurs de E avec a et b non nuls.

Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x - \langle a, x\rangle\, b \end{array}$

1) Montrer que : f bijective $\Leftrightarrow \langle a, b\rangle \neq 1$.
2) Dans le cas f bijective, calculer f^{-1}.

Exercice mineur 6

Soit E un ensemble tel que $\mathrm{card}(E) = n$ et $i \in [\![0, n]\!]$. On note $\Omega_i = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2;\ A \cup B = E,\ \mathrm{card}(B) = i\right\}$.
Déterminer $\mathrm{card}(\Omega_i)$.

Exercice mineur 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Posons $r = \mathrm{rg}\, u$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. Montrer que $n \geqslant 2r$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u soit : $\begin{pmatrix} \mathrm{O}_{r,n-r} & I_r \\ \mathrm{O}_{n-r,n-r} & \mathrm{O}_{n-r,r} \end{pmatrix}$ que

l'on peut noter abusivement $\begin{pmatrix} \mathrm{O} & I_r \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$.

Planche 1

Exercice Majeur 8

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On rappelle qu'un endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque : $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$

1. On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est antisymétrique, et donner $f(a,b,c)$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

b) Montrer que f est antisymétrique.

c) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux. Déterminer $\operatorname{rg} f$. On revient désormais au cas général.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que u est antisymétrique si et seulement sa matrice dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.

b) Montrer, à l'aide du déterminant, que si u est antisymétrique et bijectif, alors $\operatorname{rg} u$ est pair.

c) Montrer que si u est antisymétrique, alors $\operatorname{rg} u$ est pair.

Exercice mineur8

On pose pour tout $n \geqslant 2,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}}\right)$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge, puis que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

Planche 2

Exercice Majeur 9

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1 et telles que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = AX(t)$.

Montrer que $V : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$.

1. Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que $AX \in \mathcal{S}$.
2. En déduire une base de $\mathcal{S}$.
3. Soit $X \in \mathcal{S}$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Soient $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PMP^{-1}$.

Soit $Y : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que $Y' = MY$. Montrer que Y est bornée sur $\mathbb{R}$. On introduit sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par $(X|Z) = X^T Z$.

Soit $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1 et telle que $\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = \big(A + b(t)I_2\big)X(t)$.

Soit $f : t \longmapsto \|X(t)\|$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $f'(t) = 2b(t)f(t)$.Montrer que la fonction X de la question précédente est bornée.

Exercice mineur9

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, telles que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis l'on choisit, toujours au hasard, une boule dans cette urne.

Soit N le numéro de l'urne choisie ; donner la loi et l'espérance de N. Soit X le numéro de la boule choisie ; donner la loi et l'espérance de X.

Planche 3

Exercice Majeur 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1}+u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i$.

1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
   Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right)$.
   En déduire que $R_n = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g_n : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{n+x}}$.
   Montrer que g_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et que sa dérivée est croissante.
4. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, en déduire que $\frac{1}{2}\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \leq |R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$
5. Montrer que la série $\sum R_n$ converge.

Exercice mineur10

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le spectre de A.
Donner une matrice diagonale D semblable à A.
La matrice A est-elle inversible ?

Planche 4

Exercice Majeur 11

1. On considère pour $x > 0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

   a) Rappeler le critère des séries alternées avec la majoration du reste et son signe.

   b) i) f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

   b) ii) Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k+1}$.

   c) Montrer que : $\forall x > 0,\ 2f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$

   d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$

   e) Déterminer un équivalent de f en 0^+.

   f) Montrer que : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice mineur 12

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Planche 5

Exercice Majeur 13

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a,b,c) \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a,b,c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur ? Donner alors son image et son noyau.

Exercice mineur 14

On pose $f(x,y) = x \ln y - y \ln x$ pour $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

Déterminer les extremums de f sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.

Planche 6

Exercice Majeur 15

Soit $f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer $f"$ sous forme d'une intégrale.
3. a) Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ où $g(x,t)=\dfrac{x}{x^2+t^2}$.
3. b) Montrer que f est solution de $y''-y=0$.
4. Montrer que $\forall x>0,\ f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{e}^{ixu}\,\mathrm{d}u$.
5. Déterminer f.

Exercice mineur 16

Soit $A_n=\begin{pmatrix}4&2&0&\cdots&0\\2&4&2&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&2\\0&\cdots&0&2&4\end{pmatrix}$

1) Calculer $\det A_n$ pour n$\geqslant 1$.

2) Les matrices sont-elles inversibles pour tout $n\geqslant 1$?

Planche 7

Exercice Majeur 17

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, et $C_f = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n); g \circ f = f \circ g\}$.
   Montrer que C_f est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
   Donner le déterminant dans la base (e_1, e_2) de la famille $\mathcal{F} = (e_1 - x, e_2 - x)$.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la famille $\mathcal{F}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la famille $(e_1 - x, \ldots, e_n - x)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
   On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $f : e_i \longmapsto e_i - x$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Donner les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
5. f est-elle diagonalisable ?
6. En déduire la dimension de C_f et le rang de f.

Exercice mineur 18

On dispose de N voitures et N péages. Les voitures sont réparties selon la loi uniforme entre les péages. Pour tout i, X_i est la variable aléatoire représentant le nombre de voitures au péage numéro i.

1. Quelle est la loi de X_i ?
2. Donner l'espérance et la variance de X_i.

Planche 8

Exercice Majeur 19

Pour tout $n \geq 2$ entier, on pose $\mathcal{R}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C});\ \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, Q + \lambda M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.

On pose $J_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 1 \\ 1 & a_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & a_n \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det(A_2(a_1, a_2))$ et $\det(A_3(a_1, a_2, a_3))$
2. Calculer $\det(A_n(a_1, \dots, a_n))$
3. Soit D une matrice diagonale dont la diagonale contient la valeur 0. Montrer que $D \in \mathcal{R}_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $Q_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(Q_0 + \lambda M_0)$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible appartient à $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$.
5. Soit $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non-inversibles. Comparer $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$ pour l'inclusion.

Exercice mineur 20

Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathrm{ch}(n) x^n$.

Planche 9

Exercice Majeur 21

Soit E l'ensemble des fonctions continues à valeurs positives sur $[0,1]$ et ϕ l'application de E dans E qui à $f \in E$ associe $\phi(f)$ définie par $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$. On considère la suite (f_n) définie par $f_0 = 1$ et la relation de récurrence $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

1. E est-il un espace vectoriel ? Justifier.

2. a) Soit $f \in E$. Montrer que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\phi(f)'$.

2. b) ϕ est-elle injective ? surjective ?

3. a) Montrer qu'il existe des suites (α_n), (β_n) telles que : $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ pour tout entier n et tout réel $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2} \quad , \quad \beta_{n+1} = \dfrac{\beta_n}{2} + 1$

3. b) Calculer β_n en fonction de n.

4. Montrer que la suite (α_n) est minorée par une constante strictement positive, puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leqslant \dfrac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{4 - \frac{1}{2^n}}$. En déduire que la suite (α_n) converge et donner sa limite.

5. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer. La converge est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice mineur 22

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres n, p avec $p \in \,]0,1[\,$.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2. Déterminer la loi de Y.

Planche 10

Exercice Majeur 23

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Pour tout entier n, on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par f.

1. Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Montrer que $P - P(0)$ admet une infinité de racines. En déduire $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.
4. Prouver que f est surjectif.
5. Trouver tous les polynômes P tels que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
6. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice mineur 24

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Planche 11

Exercice Majeur 25

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\mathrm{d}t$ pour tout x réel convenable.

1. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$. On admet que F l'est aussi.
2. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $G(x) = xG(1)$.
3. Pour tout x réel, montrer l'encadrement $0 \leqslant G(x) - F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. En déduire que $F(x)$ est équivalent à $xG(1)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$
5. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = \pi - 4xG(1)$ sur $]0, +\infty[$.
6. En déduire une expression de F sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice mineur 26

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

1. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans E. 2. Montrer qu'il existe une constante λ complexe telle que $f^2 = \lambda f$.

Notes

[6] correction mineur 6 : *Indication : pour $n = 5$ écrire tous les A et B dans $\mathcal{P}(E)$, par exemple $[\![1, 2]\!]$ et $[\![3, 5]\!]$.*

Combien y a-t-il de façons de tirer i éléments dans un ensemble en contenant n, avec $i \leq n$?

[8] correction :

[8] correction :

[9] correction :

[9] correction :

[10] correction : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer le spectre de A.

Donner une matrice diagonale D semblable à A.

La matrice A est-elle inversible ?

[10] correction :