Déroulé de l'épreuve :

- Mines-Ponts avec 15 minutes préparation sur la première question, passage 1h sur 2 questions
- Mines-Telecom 1ère série : sans préparation, deux exercices en 30 minutes
- Mines-Telecom 2ème série (spécifique) : 25 minutes de préparation, une question de cours et un exercice à présenter en 25 minutes

I. Enoncés

Planche 1 **Mines-Telecom 1ère série**

Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$.

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite de (u_n). Étudier la monotonie de (u_n).
2. Donner une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire un équivalent de u_n.
3. Nature de la série de terme général u_n ? Nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$?

Planche 2 **Mines-Telecom 2e série** Cours

1) Définir la notion de valeur propre et du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Expliquer le lien entre ces deux notions. A admet-elle toujours une valeur propre ?
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 + I_n = 0_n$ et soit λ une valeur propre de A.
A l'aide de la définition d'une valeur propre, montrer que : $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.
Qu'en déduit-on pour l'ensemble des valeurs propres réelles de A ? pour l'ensemble des valeurs propres complexes de A ?

Exercice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_p(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\ \mathrm{e}^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

et

$$J_p(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\ \mathrm{e}^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'on définit ainsi deux fonctions J_p et I_p.
2. La fonction I_p est-elle dérivable ?
3. Pour x fixé, justifier à l'aide d'une majoration l'existence de la limite $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p(x)$, et calculer la valeur de cette limite.
4. Pour tout p, expliciter $J_p(x)$ en fonction de x.
5. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la série $\sum\limits_{p\geq 1} J_p(p^\alpha)$ est-elle convergente ?

Planche 3 **Mines-Ponts**

Question 1

Résoudre $R^2 + 2R'^2 - RR'' = 0$ avec $R(0) = a > 0$ et $R'(0) \neq 0$.

Question 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Planche 4 **Mines-Ponts**

Question :

Trouver les $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0,1[,\ \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = f(x)$.

Question :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ est nilpotente.

Planche 5 **Mines-Ponts**

Question 1 :

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules de l'urne deux par deux. Quelle est la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire ?

Question 2 :

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MB$. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Planche 6 **Mines-Ponts** Question 1 :

Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?

Question 2 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$. Déterminer le spectre de Φ.

Mines-Telecom PC 2018

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ une base de E, u un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

1. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable et la conséquence sur A de cette propriété de u.
2. Donner une caractérisation de la diagonalisabilité de u.
3. On suppose que u est diagonalisable et que $u^4 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie.
4. On suppose de plus que la trace de u vaut $n-2$, où n est la dimension de E. Quel complément peut-on apporter à la propriété démontrée à la question précédente ?

Exercice 8

On définit f par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est développable en série entière.
2. Montrer que f est solution d'une ED linéaire d'ordre 1.
3. Donner le développement en série entière de f.

Exercice 9

Soit deux urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires.

On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2.

Soit l'événement : B_n : "tirer une boule blanche au n^{ime} tirage" et $P_n = P(B_n)$.

1. Calculer P_1.
2. Calculer P_{n+1} en fonction de P_n.
3. Calculer P_n en fonction de n.

Exercice 10

Calculer la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k U_{n-k}$.

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve. On posera $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n$ pour $x \in \left]-R, R\right[$.

Exercice 11

Soit la matrice $A(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell) \\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell) \\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de $A(\ell)$ suivant les valeurs de $\ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

On se place dans un repère orthonormé du plan. On considère n points du plan, $A_1, \cdots, A_n$ donnés par leurs coordonnées dans ce repère, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $A_i = (a_i, b_i)$.

Soit $M = (x, y)$ on définit f telle que $f(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} MA_i^{\ 2}$.

Déterminer le (ou les) extremum de f.

Exercice 13

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right]^n$.

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15

Un animal se déplace entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve en A. Lorsqu'il a bu toute l'eau d'un point, il se déplace vers l'un des deux autres avec la même probabilité. On considère que l'eau se régénère après qu'il soit parti du point d'eau. On note

$a_n = P(\text{"l'animal est en } A \text{ à } \ t = n\text{"})$
$b_n = P(\text{"l'animal est en } B \text{ à } \ t = n\text{"})$
$c_n = P(\text{"l'animal est en } C \text{ à } \ t = n\text{"})$.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n. De même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Justifier que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A.
   (c) Trouver D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Exercice 16

Trouver le reste de division euclidienne de $\prod_{k=0}^{n}(X \sin k + \cos k)$ par $X^2 + 1$.

Mines-Ponts PC 2018

Exercice 17

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p. On note A_n : "au $n$ième lancé on fait pour la première fois deux piles consécutifs". On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n.
3. Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

Exercice 18

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent.

1. Montrer que $u + v$ est inversible si et seulement si u est inversible.
2. Montrer que, si u est inversible, $\det(u + v) = \det u$.

Exercice 19

On note pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n \tan x \, dx$. Déterminer la limite α de la suite (I_n) et donner un équivalent de $I_n - \alpha$.

Exercice 20

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Déterminer ses éléments propres.
2. On pose $z_n = 1 + \mathrm{i}\alpha/n$ et $u_n = (z_n)^n$.
   (a) Montrer que z_n possède un argument θ_n dans $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
   (b) Trouver un équivalent de θ_n quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Étudier la convergence de la suite de matrices $(A_n^n)_{n\geqslant 1}$. Interprétation géométrique.

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$.
3. Montrer que sa somme, notée f est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer aussi qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On pourra pour cela prouver la minoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [n,+\infty[, \quad f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

5. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 22

Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & 2y & + & te^t \\ y' & = & 8x & + & y & + & e^{-t} \end{array}\right.$

Exercice 23

Déterminer $\inf \left\{ \displaystyle\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Exercice 24

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$ quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 25

Soient P et Q deux polynômes réels non nuls. L'équation $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = e^x$ peut-elle avoir une infinité de solutions ?

Exercice 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A la matrice de coefficients $a_{i,j} = \left\{\begin{array}{ll} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{array}\right.$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 0$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable.
3. Calculer la somme des carrés des valeurs propres de A.

Exercice 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. À l'aide d'intégrales, montrer que v_n est équivalent à $n\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.
4. Démontrer la relation $v_n = n\ln(n) - n + o(n)$.

5. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 28

Pour tout entier n on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Nature de la série $\sum\left(10 - n^{\frac{1}{p_n}}\right)$?

Exercice 29

On note $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_n\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Préciser la dimension de F.
2. Pour tout entier $p \geq 3$ on note v_p le nombre de parties de $[[0, p]]$ telles que l'écart entre deux éléments quelconques d'une de ces parties soit supérieur ou égal à 3. Montrer que le suite $(v_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de F.

Exercice 30

1. Montrer qu'on définit bien une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par les relations : $\forall x \in [0,1],\ u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
3. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. La fonction limite sera notée u.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la fonction u n'est pas identiquement nulle.

Exercice 31

Soit $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et préciser les éléments propres de A.

Exercice 32

Deux joueurs de foot tirent tour à tour un penalty. Le joueur 1 (resp. 2) marque avec une probabilité $p_1 \in]0,1[$, (resp. $p_2 \in]0,1[$). On s'arrête au premier penalty réussi.

1. Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.
2. Montrer que le jeu s'arrête de manière quasi certaine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 peut-on obtenir un p_2 de telle sorte que le jeu soit équitable ?

Exercice 33

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$.

Exercice 34

Une secrétaire appelle n clients. Chaque client répond avec une probabilité de $p \in]0,1[$, indépendamment des autres.

On note X la v.a.r.d. correspondant au nombre de clients ayant répondu lors de cet appel.

Ensuite elle décide de rappeler ceux qui n'ont pas répondu, soit $n - X$ personnes, et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de ce second appel - mêmes hypothèses sur les réponses.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer $P_{X=i}(Y = k)$.
3. Posons $Z = X + Y$. La variable Z suit-elle une loi binomiale, si oui avec quels paramètres ?

Exercice 35

Soit : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,\mathrm{d}t$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Donner la limite de f en $+\infty$

Exercice 36

On note pour $n > 0$,$f_n : t \mapsto e^{\frac{n}{n-1}t}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle du type $]-\infty, b]$.
3. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Notes

[1] correction :

Le polynôme caractéristique est $X^2-2X+1=(X-1)^2$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto (at+b)e^t$, où a et b sont deux constantes réelles. Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Q(t)e^t$, où Q est un polynôme de degré $0+2$ et de valuation $\geqslant 2$, c'est-à-dire que $Q=kX^2$, où $k \in \mathbb{R}$. On trouve $k=\dfrac{1}{2}$, et finalement, les solutions de l'équation proposée sont les fonctions telles que

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)=\left(\frac{x^2}{2}+ax+b\right)e^x.$$

[1] correction :

1. La majoration $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ montre que $\lim u_n = 0$. Comme $x^{n+1} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0,1]$, la suite (u_n) est décroissante.
2. On obtient $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1-1)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x - u_n = \frac{1}{n+1} - u_n$, ou encore
$$u_{n+1}+u_n = \frac{1}{n+1}.$$
La décroissance de la suite (u_n) montre que $2u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 2u_n$. En substituant n par $n-1$ dans la première inégalité que l'on vient d'écrire, on obtient $2u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Finalement, on a démontré l'encadrement $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, d'où l'on tire immédiatement que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$
3. L'équivalent (entre suites de signe fixe) démontré à la question (b) montre que $\sum u_n$ diverge. La décroissance et la limite de la suite (u_n) établies à la question (a) montrent que les hypothèses du théorème spécial des séries alternées sont satisfaites, donc $\sum(-1)^n u_n$ converge.

[2] correction :

1. Pas de difficulté si le cours sur les intégrales généralisées est acquis.
2. On domine la dérivée partielle par rapport à x, pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi : t \mapsto te^{-pt}$ continue positive intégrable et on conclut via le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre (Leibniz)
3. – on majore directement $0 \leq I_p(x) \leq \dfrac{1}{p}$, en justifiant bien par croissance de l'intégrale.
   – variante : Théorème de convergence dominée : pas de difficulté, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p(x) = 0$.
4. $J_p(x) = Im\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(\mathbf{i}x-p)t}\,\mathrm{d}t\right) = Im\left(\dfrac{-1}{(\mathbf{i}x-p)}\right) = \left(\dfrac{x}{x^2+p^2}\right)$.
5. • **3 points** : 0,5pt pour vérifier que la série est à termes positifs avant de prendre l'équivalent ; puis 1pt+0,5pt+1pt (par cas)
   $J_p(p^\alpha) = \dfrac{p^\alpha}{p^{2\alpha}+p^2}$.
   ⋆ Si $\alpha < 1$, $J_p(p^\alpha) \underset{p\to+\infty}{\sim} p^{\alpha-2}$, et comme $\alpha - 2 < -1$, il y a convergence.
   ⋆ Si $\alpha = 1$, $J_p(p^\alpha) = \dfrac{1}{2p}$, la série diverge.
   ⋆ Si $\alpha > 1$, $J_p(p^\alpha) \underset{p\to+\infty}{\sim} p^{-\alpha}$, et comme $-\alpha < -1$, il y a convergence.
   Ainsi la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} J_p(p^\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha \neq 1$.

[3] correction :

On remarque que R ne s'annule pas sur un voisinage Vde zéro puisque $R(0) \neq 0$. On peut donc effectuer, sur V, le changement de fonction $u = \dfrac{1}{R}$. Alors

$$u' = -\frac{R'}{R^2},$$
$$u'' = -\frac{R''}{R^2} + 2\frac{R'^2}{R^3} = \frac{2R'^2 - RR''}{R^3}.$$

En divisant par R^3 l'équation différentielle de l'énoncé, on montre que cette dernière est équivalente, sur V, à $u''+u=0$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=\lambda\cos+\mu\sin$. Si l'on désigne par b la valeur de $R'(0)$, on obtient $\lambda=\dfrac{1}{a}$ et $\mu=u'(0)=-\dfrac{R'(0)}{R^2(0)}=-\dfrac{b}{a^2}$. Par suite,

$$\forall t\in V,\quad R(t)=\frac{1}{u(t)}=\frac{a^2}{a\cos t-b\sin t}.$$

Le plus grand intervalle $V_{\max}$ contenant zéro sur lequel l'expression ci-dessus a un sens est

$$V_{\max}=\left]\arctan\left(\frac{a}{b}\right)-\pi,\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right[,\quad \text{si } b>0,$$
$$V_{\max}=\left]\arctan\left(\frac{a}{b}\right),\arctan\left(\frac{a}{b}\right)+\pi\right[,\quad \text{si } b<0.$$

[3] correction : Le polynôme X^2-1+1 annule A et est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. De plus, les valeurs propres sont deux à deux conjuguées et, puisque

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\left\{e^{i\frac{\pi}{3}},e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\},$$

le déterminant de A est produit de nombres complexes conjugés de module 1, donc $\det(A)=1$.

[4] correction : On raisonne par analyse et synthèse, et on va montrer que les solutions sont les fonctions linéaires $x\mapsto bx$.

Analyse. Si f satisfait les conditions de l'énoncé, elle est dérivable sur $[0,1[$ avec $\forall x\in[0,1[,\ f'(x)=f(1-x)/(1-x)$: attention, il y a deux signes moins dans le calcul de cette dérivée. On en déduit que f est deux fois dérivable sur $]0,1[$ avec

$$\forall x\in]0,1[,\quad f''(x)=-\frac{f'(1-x)}{1-x}+\frac{f(1-x)}{(1-x)^2}=-\frac{f(x)}{x(1-x)}+\frac{f'(x)}{1-x}.$$

Il en résulte que f est solution de l'équation différentielle $x(1-x)y''-xy'+y=0$ sur $]0,1[$. On remarque que l'identité $x\mapsto x$ est une des solutions et qu'elle ne s'annule pas sur $]0,1[$. On applique alors la méthode d'abaissement de l'ordre, en cherchant les solutions sous la forme $y\colon x\in]0,1[\mapsto xg(x)$, où g est deux fois dérivable sur $]0,1[$.

Alors $y'(x)=xg'(x)+g(x)$, $y''(x)=xg''(x)+2g'(x)$ et l'équation différentielle devient $\forall x\in]0,1[$, $x(1-x)[xg''(x)+2g'(x)]-x[xg'(x)+g(x)]+xg(x)=x^2(1-x)g''(x)+x[2(1-x)-x]g'(x)=0$, ou encore

$$\forall x\in]0,1[,\quad x(1-x)g''(x)+(2-3x)g'(x)=0.$$

On pose $h=g'$, on décompose en éléments simples $\dfrac{2-3x}{x(1-x)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{1-x}$, de sorte qu'il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 en h suivante :

$$\forall x\in]0,1[,\quad h'(x)+\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}\right]h(x)=0.$$

Ses solutions sont les fonctions d'expression $h(x)=a\exp(-2\ln|x|-\ln|x-1|)=a/[x^2(1-x)]$, où a est une constante réelle. Une autre décomposition en éléments simples donne $1/[x^2(1-x)]=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1/(1-x)$. On en déduit que les fonctions g ont pour expression $g(x)=a[-\dfrac{1}{x}+\ln x-\ln(1-x)]+b$, où b est une constante réelle. Finalement,

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall x\in]0,1[,\quad f(x)=a\left[-1+x\ln x-x\ln(1-x)\right]+bx.$$

Synthèse. Pour qu'une fonction dont l'expression sur $]0,1[$ donnée ci-dessus soit prolongeable par continuité en 1, il faut que $a=0$. Alors $f\colon x\mapsto bx$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ avec la même expression, et on vérifie que

$$\forall x\in[0,1[,\quad \int_{1-x}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{1-x}^{1}\frac{bt}{t}\mathrm{d}t=bx=f(x).$$

[4] correction : Puisque $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est sembable à une matrice triangulaire T ayant pour diagonale $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ les valeurs propres de A. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Si $P(A)$ est nilpotente, $P(T)$ l'est aussi. Or $P(T)$ est aussi triangulaire et ne peut être nilpotente que si sa diagonale est nulle. Or, la diagonale de $P(T)$ est $(P(\lambda_1),P(\lambda_2),\ldots,P(\lambda_n))$. Donc, $P(A)$ est nilpotente si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont racines de P.

[5] correction :

Pour $1\leqslant i\leqslant n$, notons S_i l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche et une boule noire » et A l'événement dont on cherche la probabilité. On a

$$A=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\quad (n \text{ succès}).$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(S_1)\times\mathbb{P}_{S_1}(S_2)\times\mathbb{P}_{S_1\cap S_2}(S_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{S_1\cap\cdots\cap S_{n-1}}(S_n).\tag{1}$$

Chacun des n facteurs est la probabilité p_k de tirer une boule blanche et une boule noire quand on tire simultanément 2 boules dans une urne contenant k boules blanches et k boules noires (avec k variant de n à 1).

Lorsque l'urne contient $2k$ boules (k blanches et k noires) cette probabilité est :

$$p_k = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{k^2}{\binom{2k}{2}} = \frac{k^2}{\frac{2k(2k-1)}{2}} = \frac{k}{2k-1}.$$

On peut retrouver cette probabilité p_k en considérant qu'on tire 2 boules sans remise et alors $p_k = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{k}{2k} \times \frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k} \times \frac{k}{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$.
En reprenant (1), il vient alors :

$$\mathbb{P}(A) = p_n \times p_{n-1} \times \cdots \times p_1 = \frac{n}{2n-1} \times \frac{n-1}{2n-3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

5 correction :

Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors A et B sont semblables, donc ont mêmes valeurs propres. Comme A est trigonalisable elle possède au moins une valeur propre λ, qui est bien une valeur propre commune à A et à B.

Dans la suite, on note r le rang de M, et on suppose que $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Il existe alors P et Q inversibles telles que $PJ_rQ = M$. Comme on a $APJ_rQ = PJ_rQB$, il vient $(P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1})$.

- On décompose alors en blocs non triviaux (inspirés de J_r) les matrices $A' = P^{-1}AP$ et $B' = QBQ^{-1}$:

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  La relation $A'J_r = J_rB'$ donne alors : $A'_1 = B'_1$, $A'_3 = 0$, et $B'_2 = 0$. Ainsi on a :

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ 0 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix}.$$

  Par suite, $\chi_{A'} = \chi_{A'_1}\chi_{A'_4}$ et $\chi_{B'} = \chi_{A'_1}\chi_{B'_4}$.
- Comme A est diagonalisable, la matrice $A' = P^{-1}AP$ l'est aussi, ainsi que A'_1 (on le voit avec le sous-espace stable de l'endomorphisme canoniquement associé). Alors $\chi_{A'_1}$ admet au moins une racine λ et le réel λ est valeur propre de A' et de B' donc, par similitude, de A et de B.

6 correction : On va démontrer que $\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Sp}(\Phi) = \{\alpha + \beta,\ (\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}.$$

Inclusion dans le sens direct ? ?

Inclusion dans le sens réciproque. Soient α une valeur propre de A et β une valeur propre de B, donc aussi de sa transposée. Il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = \alpha U$ et $B^TV = \beta V$. On pose $M = UV^T$, ce qui définit une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\Phi(M) = AU\,V^T + U(B^TV)^T = \alpha UV^T + \beta UV^T = (\alpha + \beta)M,$$

ce qui prouve que $\alpha + \beta \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et achève la preuve.