Exercice 1 ✰

Résoudre $x^3 - 1 \leq 2$

Résoudre $|x-1| = 3 - x$

Exercice 2 ✰✰

Exercice 3 ✰✰

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$$

Exercice 4 ✰✰

Déterminer une base de l'espace vectoriel
$E = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$

Exercice 5 ✰✰

Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X' = BX$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notes

[1] correction exo 1 :

$\iff x \leq 3^{1/3}$ par croissance de $t \mapsto t^3$

---

[2] correction exo 2 :
Nécéssairement $3 - x \geq 0$

$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \iff x = 2$, Unique solution 2.

---

[3] correction exo 3 :

$z \in \{2e^{i(\pi/4+2k\pi)/3}; k \in [\![0,2]\!]\} \iff z \in \{2e^{i(\pi/12+2k\pi/3)}; k \in [\![0,2]\!]\}$

---

[4] correction exo 4 :
Il s'agit du noyau d'une forme linéraire donc un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$.

On peut prendre :

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

---

[5] correction exo 5 :

$Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda, \delta, \overline{\delta}\}$ avec $\lambda = 2$ et $\delta = 1 + \mathbf{i}$, $\overline{\delta} = 1 - \mathbf{i}$ associées aux vecteurs propres $W_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $W_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W_{\overline{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une base des solutions du système diagonal est $(t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(1+\mathbf{i})t} \\ 0 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{(1-\mathbf{i})t} \end{pmatrix})$.

Une base des solutions du système $X' = AX$ est $\left(t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \mathrm{Re}(e^{(1+\mathbf{i})t} W_\delta), t \mapsto \mathrm{Im}(e^{(1+\mathbf{i})t} W_\delta) \right)$.

Les solutions réelles sont de la forme $t \longmapsto \lambda e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + \xi e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$
