Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : t \longmapsto \frac{t^n}{n}$. Justifier que u_n est continue.

2. Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.

3. que peut-on en déduire pour la somme $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$?

4. la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle normalement sur $]-1,1[$?

5. la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle simplement sur $[-1,1]$?

Exercice 2

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral montrer que
$$\forall x \in [0,\pi/2],\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire l'inégalité :
$$\forall x \in [0,\pi/2],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

3. Montrer que
$$\forall x \in [0,\pi/2],\ \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 3

En réalisant le changement de variables
$$\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$$
déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$