Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : t \longmapsto \dfrac{t^n}{n}$. Justifier que u_n est continue.

2. Justifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.

3. que peut-on en déduire pour la somme $S : t \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$?

4. la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]-1,1[$?

5. la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle simplement sur $[-1,1]$?

Exercice 2

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral montrer que

$$\forall x \in [0,\pi/2],\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24} \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire l'inégalité :

$$\forall x \in [0,\pi/2],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

3. Montrer que

$$\forall x \in [0,\pi/2],\ \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 3

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Notes

[1] correction exo 1 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue car polynomiale.
2. Pour $[a, b] \subset]-1, 1[$ et $c = \max(|a|, |b|$, $\|u_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \dfrac{c^n}{n}$, donc $\|u_n\|_\infty^{[a,b]} = O(1/n^2)$.
3. $S : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ est continue sur tout segment de $]-1, 1[$, comme somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément car normalement, ou bien comme somme d'une série entière dont le r.c.v. est $R \geq 1$.
4. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$, car $\|u_n\|_\infty^{]-1,1[} = \dfrac{1}{n}$ est le terme général d'une série (harmonique) divergente.
5. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas simplement sur $[-1, 1]$, car $\sum u_n(1)$ diverge.

[2] correction exo 2 :

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral on a $\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x = \sin(0) + \sin'(0)x - \dfrac{x^3}{6}\sin'''(0) + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\sin'''(t)\ \mathrm{d}t$
soit
$$\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\cos(t)\ \mathrm{d}t$$
2. Pour $0 \leq t \leq x \leq \pi/2$, $\cos(t) \geq 0$.
Donc $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\sin'''(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$, par positivité de l'intégrale.
Ainsi :
$$\forall x \in [0, \pi/2],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$
3. Analogue Taylor reste intégrale d'ordre 5.
$$\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

[3] correction exo 3 :
$g(u, v) = f(x, y) = f(u, u + v)$

donc $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 1 \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(u, u + v) + 1 \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(u, u + v)$

c'est à dire : $\partial g/\partial u = g$

On en déduite qu'il existe $C \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$g(u, v) = C(v)\ \mathrm{e}^u$, soit $f(x, y) = C(y - x)\ \mathrm{e}^x$