Exercice 1

Calculer le produit des n-ième racines de l'unité.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, t^x \,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. (a) Pour $x > -1$,on pose $g_x : t \longmapsto \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x$. Déterminer des équivalents de g_x en 0^+ et en 1^-.

   (b) En déduire que f est bien définie.

2. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis que

   $$\forall x > -1,\ f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

   (b) En remarquant que $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est bornée sur $]0,1[$ par une constante $M > 0$ (que l'on ne cherchera pas à calculer), montrer que :

   $$\forall x > -1,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x+1}$$

   (c) En déduire que f est la fonction telle que

   $$\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$