Exercice 1 ✰

Simplifier $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi,\pi[$.

Exercice 2 ✰✰

1. Pour $t \in]-1,1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n$.
2. En déduire l'espérance d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exercice 3 ✰✰✰

On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Vérifier que la droite D dirigée par $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ est stable par f.
3. Montrer que la restriction de f au plan $D^\perp$ est une rotation, dont on précisera l'angle.

Notes

[1] correction exo 1 :
$e^{i\theta} \neq -1$car $\theta \in]-\pi, \pi[$.

$$\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}} = \frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)} = \boxed{i\tan(\theta/2)}$$

---

[2] correction exo 2 :

1. Le rayon de convergence R de la série entière géométrique $\sum_{k\geq 0} t^k$ vaut $R=1$, et sa somme F vérifie :
   $\forall t \in]-1,1[,\ F(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k.$
   Par dérivation terme à terme des séries entières, le rayon de convergence de $f : t \mapsto F'(t)$ est aussi $R=1$ et :
   $\forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}(t^k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt}(t^k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kt^{k-1}.$
   Ainsi, pour tout $t \in]-1,1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} kt^k = \sum_{k=1}^{+\infty} kt^k = t\sum_{k=1}^{+\infty} kt^{k-1} = tf(t) = tF'(t) = t \times \frac{1}{(1-t)^2}$
2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \geq 1$, $P[X=k] = (1-p)^{k-1}p$
   La série $\sum_{k\geq 0} kP[X=k]$ est de terme général $a_k = \frac{p}{1-p} \times k(1-p)^k$.
   D'après le 1 pour $t = 1-p \in]-1,1[$, on en déduit que la série $\sum_{k\geq 0} kP[X=k]$ est absolument convergente, de somme

$$\boxed{E[X] = \frac{p}{1-p} f(1-p) = \frac{p}{1-p} \times \frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}}$$

---

[3] correction exo 3 :

1. On calcule directement $M^T M = I_3$, donc f est une isométrie.
2. On calcule $M\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, donc $f(u) = -u$, donc D est stable par f (droite dirigée par un vecteur propre associé à la valeur propre -1, et $D \subset E_{-1,f} = \mathrm{Ker}(-1Id - f)$.
3. Somme f est une isométrie et D stable par f, alors $D^\perp$ est stable par f.
   De plus, $\dim(D^\perp) = 3 - \dim(D) = 2$, $D^\perp$ est un plan stable par f.
   On calcule $\det(f) = \det(M) = -1$.
   Or en prenant une base orthonormée $B' = (e_1', e_2', e_3')$ adaptée à $E = D \oplus D^\perp$, M est semblable à $N = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & C & \end{pmatrix}$, avec $C = Mat_{(e_2',e_3')}(f_{|D^\perp}^{|D^\perp})$.
   Donc $-1 = \det(f) = -1 \times \det(C)$, et $1 = \det(C) = \det(f_{|D^\perp}^{|D^\perp})$, donc $g = f_{|D^\perp}^{|D^\perp}$ est une isométrie de déterminant 1 donc une rotation.
   Comme $\mathrm{Tr}(f) = -1 + \mathrm{Tr}(g)$, on a $\mathrm{Tr}(g) = 0$. Comme $C = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$
   on obtient $1 = 2\cos\theta$, donc $\theta \in -\pi/2, \pi/2$ à 2π près.
   En prenant $V = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$
   $W = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \perp D$, et $T = \begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$,
   On a (V, W, T) bon adaptée à la somme directe.
   on calcule $MW = \begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{pmatrix} = T$, et on remarque que $MW = \cos(\theta)W + \sin(\theta)T$ dans la première colonne de C
   $< MW|T >= \sin(\theta)T$, d'où $\sin(\theta) = -1$,
   Finalement $\boxed{\theta = \frac{-\pi}{2}}$
