

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z + 1)^n = (z - 1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 2

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A relativement à la base canonique.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

2) Montrer que les deux sous-espaces

$\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}((f - 3\text{id})^2)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

3) Justifier que $\text{Ker}(f - 3\text{id})^2 \supset \text{Ker}(f - 3\text{id})$

4) Déterminer un supplémentaire W de $\text{Ker}(f - 3\text{id})$ dans $\text{Ker}((f - 3\text{id})^2)$, et une base adaptée à la somme directe $\text{Ker}((f - 3\text{id})^2) = \text{Ker}(f - 3\text{id}) \oplus W$.

5) En déduire qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer T^n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire A^n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.