Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Pour $z = 1$, on ne trouve pas de solution.

Pour $z \neq 1$, on se ramène à $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$

c'est à dire à :

$\exists k \in [\![0, n-1]\!];\ \dfrac{z-1}{z+1} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} \quad (E_k)$

$(E_k) \iff z - 1 = (z+1)\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \iff z(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/n}) = (1+\mathrm{e}^{2ik\pi/n})$

Pour $k = 0$, on n('obtient pas de solution.

$\boxed{\text{Pour } k \in [\![1, n-1]\!], \text{ on obtient une solution } z_k = \dfrac{1+\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{1-\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}}$

Exercice 2

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2) Montrer que les deux sous-espaces

$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}((f - 3\mathrm{id})^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3) Justifier que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id})^2 \supset \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id})$

4) Déterminer un supplémentaire W de $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id})$ dans $\mathrm{Ker}((f - 3\mathrm{id})^2)$, et une base adaptée à la somme directe $\mathrm{Ker}((f - 3\mathrm{id})^2) = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id}) \oplus W$.

5) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $T^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $A^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

---

1. Pour $x \in \mathbb{C}$, $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = (x-3)((x-2)^2 - 1) = (x-3)^2(x-1)$.

   Donc $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 3\}$

   Pour $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout :

   $$AV = V \iff x + y = 0 \text{ et } z = 0 \iff V = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$AV = 3V \iff -x + y + z = 0 \text{ et } x - y + z = 0 \iff V = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. On a $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $(A-3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

dont le noyau est le plan d'équation $-2x+2y=0$.

Comme $\overrightarrow{u} = (1;-1;0)$ n'appartient pas à ce plan $P = \mathrm{Ker}((f-3\mathrm{id})^2)$, $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = E_{1,f}$ est tel que $P+D$ est directe. Comme $\dim(P)+\dim(D) = 3$, on en déduit que $P+D = \mathbb{R}^3$, c'est à dire que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}((f-3\mathrm{id})^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. Pour $g = f - 3\mathrm{id}$, $x \in E$, $g(x) = 0 \Rightarrow g^2(x) = g(g(x)) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$.
4. On choisit $\overrightarrow{v} = (1;1;0) \in E_{3,f}$. P est d'équation $x - y = 0$, pour $\overrightarrow{w} = (0;0;1)$, on obtient $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ base de P. On pose $W = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w})$. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ Adaptée à $E_{1,f} \oplus P$ et à $E_{1,f} \oplus E_{3,f} \oplus W$.
5. On écrit la matrice dans cette base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. On conclut par binôme de Newton