

TD : Méthode d'Euler

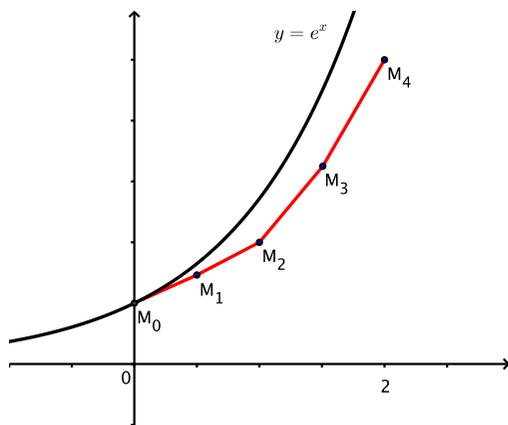
Introduction

la méthode d'Euler sert à construire une **approximation de la solution d'une équation différentielle**. En particulier, cela permet d'envisager la résolution (approchée) d'équations que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

Dans la suite, on va construire une approximation sur $[0; 2]$ de la solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$. Cette équation différentielle a une solution connue :

1 Principe

Graphiquement, on va construire une ligne brisée pour approcher la courbe de \exp .



2 Construction des points

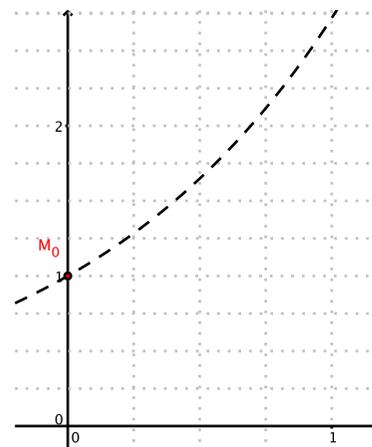
On cherche à créer des points $M_i(x_i; y_i)$ avec $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ qui visent à approcher ceux de la courbe (x_i, e^{x_i}) .

Ici, \exp joue le rôle d'une fonction f que l'on ne connaît pas mais qui est la solution d'une équation différentielle donnée (ici $y' = y$).

1. Combien de points cherche-t-on à construire ?
2. Si les points sont répartis régulièrement, depuis 0 jusqu'à 2, quel sera l'écart entre leurs abscisses ?

C'est le **pas** de la **subdivision** de $[0; 2]$; on le note h .

3. En déduire les valeurs de x_i pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
4. Quelle est la valeur de y_0 ?
5. Construisons le second point. Sur la figure ci-dessous, on fait figurer M_0 ainsi que la courbe de $y = e^x$ que l'on cherche à approcher.



- a) On va faire une approximation affine, c'est-à-dire approcher la courbe par une droite. Laquelle ?
- b) La représenter sur la figure.
- c) Quelle est son équation réduite ?
- d) Quelle valeur prendre pour y_1 ?

6. Construisons à-présent le troisième point. On va encore à-nouveau faire une approximation affine sur l'intervalle $[h, 2h]$. La droite que l'on va choisir passe par M_1 . On aimerait prendre comme coefficient directeur $f'(x_1)$ mais on ne le connaît pas.

L'équation de la droite est donc :

Et on a donc $y_2 =$

On continue de la sorte pour créer les points suivants.

3 Simulations numériques avec 4, 15 et 50 points

