CPGE Brizeux Quimper

Quimper, le 4 septembre 2021
Année scolaire 2020-21

TDPSI-1-series

Analyse : Séries numériques

Exercice 1 — *Nature et somme de séries numériques*

Donner la nature des séries numériques de terme général u_n puis, si elles convergent, calculer les sommes :

1. $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$; $n \geqslant 2$.

2. $u_n = \sqrt{n}\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)$; $n \neq 0$.

3. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$; $n \neq 0$.

4. $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$; $n \neq 0$.

5. $u_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$; $n \neq 0$. *(Sans la formule de Stirling)*

6. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$

Exercice 2 — *Nature de séries*

Étudier la nature des séries suivantes, de terme général u_n exprimé par :

1. $\dfrac{\sin(n)}{n^2}$

2. $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

3. $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

4. $\dfrac{n^n}{(n+1)(n-2)(n+3)\cdots 2n}$

5. $\dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 — *Avec des développement limités*

Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}_+^*$ est-on assuré que la série $\sum u_n$ converge ?

1. $u_n = 1 - \cos\dfrac{\pi}{n^a}$

2. $u_n = \exp\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^a}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\dfrac{2}{n^a}\right)\right)$

3. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

4. $u_n = \sin^2\left[\pi\left(n+\dfrac{1}{n^a}\right)\right]$

5. $u_n = \dfrac{\arctan\left(\sqrt{n}\right)}{n^a}$

6. $u_n = n\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$ $(n>1)$

Exercice 4 — *Une étude de convergence*

Discuter suivant les valeurs des réels a, b et c la convergence de la série de terme général

$$u_n = a\ln(n+3) + b\ln(n+2) + c\ln(n+1)$$

et calculer sa somme.

Exercice 5 — *Nature de séries*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

2. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $a_0 > 0$ et par la relation de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-a_n}$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$? Donner un développement limité à deux termes de a_n. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$.

Exercice 6 — *Séries alternées*

Étudier la convergences des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$

2. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n^a}{n^{2a}}$

3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+\sqrt{n}}$

4. $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)$

5. $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln(n)}{n}$

6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right]$

EXERCICE 7 — *Comparaison avec une intégrale*

1. Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$.

2. Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$. La série de terme général $\dfrac{1}{v_n}$ est-elle convergente ?

EXERCICE 8 — *Un développement asymptotique*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Établir que $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leqslant s_n \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ $(*)$. En déduire que $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = s_n - 2\sqrt{n}$. En utilisant $(*)$, montrer que $-2 < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - 2 \leqslant u_n \leqslant 0$.

3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle converge vers un réel $\ell \in [-2;0]$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = u_n - \ell$.

a. Établir que $v_n - v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

On peut donc affirmer : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, \left| v_n - v_{n-1} + \dfrac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4n^{\frac{3}{2}}}$ $(**)$.

b. En utilisant $(**)$, en examinant le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(v_k - v_{k-1} + \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} \right)$, établir que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$.

c. Établir que $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$.

d. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$. En déduire un équivalent de v_n.

5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \ell + 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

EXERCICE 9 — *EIVP 17*

1. Étudier la convergence de $\sum u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+n+1}$. *On pourra étudier $u_n + u_{n+1}$.*

2. Nature de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$

EXERCICE 10 — *Un calcul de somme*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\big(\ln(n)\big)^2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

On pourra trouver un lien avec la suite de la somme harmonique ainsi que la constante d'Euler-Mascheroni, i.e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$. *La série qui est calculée ici intervient dans le cadre de la fonction ζ de Riemann et plus particulièrement dans la démonstration du théorème fondamental des nombres premiers (Hadamard-La Vallée Poussin).*