CPGE
Brizeux
Quimper

Quimper, le 18 août 2021
Année scolaire 2021-2022

TDPSI-2-Suitfonc

Analyse : Suites & séries de fonctions

Exercice 1 *(CCP)*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$.

Exercice 2 *(ICNA)*

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$.

Exercice 3

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 *(CCP)*

Étudier les convergences de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ où

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$

Exercice 5

Ensemble de définition et continuité de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Donner un équivalent en 0^+ et sa limite en $+\infty$.

Exercice 6

On note $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $u_n(t) = \dfrac{t^n \ln(t)}{H_n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.
2. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0, a]$ où $a \in]0,1[$. En est-il de même sur $]0,1[$?
3. Montrer que S est continue sur $]0,1[$.
4. Est-elle dérivable sur cet intervalle ?

Exercice 7

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

Exercice 8

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}\right)$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$. Étudier la convergence simple. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Le redémontrer directement.

Exercice 11

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$. Montrer que l'on n'a pas les hypothère du théorème de dérivation des suites de fonctions. Montrer que pourtant on a la conclusion du théorème de dérivation des suites de fonctions.

Exercice 13

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$. En déduire les variations de S.

2. Établir que $S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}$ et en déduire un équivalent de S en 0.

3. Montrer que $\dfrac{S(x)+S(x+1)}{2} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{S(x)+S(x-1)}{2}$ et en déduire un équivalent en $+\infty$.

Exercice 14

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur $[0,1]$ par : $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction u non identiquement nulle

3. Démontrer la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

4. Montrer que u est solution de $u'(x) = u(x-x^2)$.