

Méthodes à retenir :

- Pour justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il suffit de vérifier que l'intersection est réduite au vecteur nul, et que la somme des dimensions est celle de l'espace vectoriel considéré, en dimension finie.
- La notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel F par un endomorphisme est équivalente à la présence d'un bloc de zéros dans une base adaptée à une somme directe entre F et un supplémentaire.
- Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme, et la relation entre ces matrices est la formule de passage vue en PCSI.

I. Exemples usuels

Exercice 1

Soit p un projecteur de E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $n - 1 \geq r \geq 1$ le rang de p .

1. Justifier que $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$, et préciser, pour \vec{x} vecteur de E la décomposition de \vec{x} dans la somme directe précédente.
2. On note s la symétrie par rapport à $\text{Im } p$ dans la direction de $\text{Ker } p$. Justifier que $s = 2p - \text{Id}_E$.

Exercice 2 ☆☆

Prouver qu'il existe une seule application linéaire v de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_1[X]$ telle que $\text{Ker } v$ soit engendré par $(X - 1)$ et $(X - 2)$ et telle que $v(X^2) = X$. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$?

II. Sommes directes

Exercice 3 ☆

On note $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \{\lambda I_2; \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \text{Ker}(\text{Tr}) \subset E$. (la trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux).

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. $F + G$ est-elle directe ?
3. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 4 ☆☆

Soit E un espace vectoriel quelconque et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$.

1) Démontrer que : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Qu'en déduit-on pour la nature de f ? Illustrer géométriquement.

2) Si E est de dimension finie, sous quelle forme simple s'écrit la matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe ?

3) Donner un exemple d'endomorphisme f tel que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ mais $f \circ f \neq f$.

4) Donner un exemple d'endomorphisme f qui ne vérifie pas $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Exercice 5 ☆☆

1. Donner la définition de deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E .
2. On considère maintenant l'espace vectoriel E des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} , $F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{g : x \mapsto ax + b; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 6 ★★★ « matrices symétriques et antisymétriques »

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{A}_n = \{R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); R^T = -R\}$ et $\mathcal{S}_n = \{S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); S^T = S\}$.

- Justifier que toute matrice $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire dans la somme $\mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$ sous la forme : $Q = R + S$, avec $R = \frac{1}{2}(Q - Q^T)$ et $S = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$.
- Justifier que la décomposition précédente est unique.
- En déduire que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.
- Justifier que la famille $\mathcal{B}_a = (E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de \mathcal{A}_n .
- Justifier que la famille $\mathcal{B}_s = ((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de \mathcal{S}_n .
- En déduire une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

III. Sous-espaces stables

Exercice 7 ★★

Prouver qu'il existe un seul endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\text{Ker } u$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et tel que $u(X) = 2X$.

Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?

Quels sous-espaces vectoriels stables apparaissent dans cette écriture matricielle ?

Exercice 8 ★★★

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Comparer pour l'inclusion les sous-espaces vectoriels $E_1 = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$, $E_2 = \text{Ker}((f - \text{id}_E)^2)$ et $E_3 = \text{Ker}((f - \text{id}_E)^3)$.
- Déterminer une base de E_1 .
- En déduire un supplémentaire S_1 de E_1 dans E_2 et une base adaptée à la somme directe $E_2 = E_1 \oplus S_1$.
- En déduire un supplémentaire S_2 de E_2 dans E_3 et une base adaptée à la somme directe $E_3 = E_2 \oplus S_2$.
- Déterminer la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus S_1 \oplus E_2$.

Exercice 9 ★★★

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. On suppose que $f + f^2 + f^3 = O_{\mathcal{L}(E)}$.

- $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
- Justifier que $F = \text{Im}(f)$ est stable par f .
- Montrer que l'endomorphisme $g = f|_F$ induit par f sur F est un automorphisme de F .

IV. Déterminant

Exercice 10 ★

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

Exercice 11

☆

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(4) & \dots & \ln(n) \\ 0 & \ln(3) & \ln(4) & & \vdots \\ 0 & 0 & \ln(4) & \ddots & \ln(n) \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ln(n) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ln(n) \end{vmatrix} ;$

Exercice 12

☆

Factoriser $\Gamma = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^4 \end{vmatrix}$

Exercice 13

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(M^T) = \det(M)$.
2. On suppose que la matrice M est antisymétrique (i.e. $M^T = -M$) et non nulle.
 - (a) Montrer que si n est impair alors M n'est pas inversible.
 - (b) Montrer que si $n = 2$, alors M est inversible.
 - (c) Si $n = 4$, peut-on affirmer que M est inversible ? qu'elle ne l'est pas ?

Exercice 14

☆☆☆

Calculer sous forme factorisée l'expression de

$$P(x) = \det(xI_3 - M), \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de x la matrice $xI_3 - M$ est-elle non inversible ?

Exercice 15

☆☆☆

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ distincts.

$$\text{On pose } D_1 = a + b, D_2 = a^2 + ab + b^2, \text{ et pour } n \geq 3, D_n = \begin{vmatrix} a + b & ab & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & ab & \\ & & & 1 & a + b \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice 16

☆☆☆ « Matrices de transvection »

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note C_1, \dots, C_n ses vecteurs colonnes, et L_1, \dots, L_n ses lignes. Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j}$.

- 1) Justifier que $T_{i,j,\lambda}$ est inversible.
- 2) A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à droite par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(MT_{i,j,\lambda})$ et $\det(M)$.
- 3) A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à gauche par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(T_{i,j,\lambda}M)$ et $\det(M)$.

V. Trace

Exercice 17 ☆☆ « Application transposée »

Rappeler la base canonique \mathcal{B} de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Ecrire dans cette base la matrice de l'application linéaire $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^T$, puis calculer $\det(f)$ et $\text{tr}(f)$.

Exercice 18 ☆☆ Trace et rang d'un projecteur

Soit p un projecteur de E de dimension n , et $r = \text{rg}(p)$.
En utilisant que $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$, à l'aide d'une base adaptée, démontrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

VI. Pour aller plus loin

Exercice 19 ☆☆ Nilpotents

Soit u un endomorphisme de E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie $n \geq 2$.

On suppose que la composée n fois $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on dit que u est nilpotent d'ordre n).

- Justifier qu'il existe un vecteur \vec{x} de E tel que $u^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$.
- On fixe alors un tel vecteur \vec{x} . Justifier que la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$ est une famille libre de E .
- En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 ☆☆☆☆

Soient n un entier, $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \neq 0$. En déduire que M est inversible. Calculer son inverse.

(on pourra le chercher sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & (*) \\ 0_n & B^{-1} \end{pmatrix}$)

Exercice 21 ☆☆☆☆

Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est à dire tel qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer que $\text{Id}_E - f$ est inversibles.
- Même question pour $\text{Id}_E + f$

Exercice 22 ☆☆☆

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P = X^2 - 1$.

- Justifier que $F = \{P \times Q; Q \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
- On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme Q associe son reste dans la division euclidienne par P .
 - Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.
 - Montrer que f est une application linéaire.
 - Déterminer l'image et le noyau de f .
- Soit $G = \mathbb{R}_1[X]$. Justifier que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = a_n X + b_n$ le reste de X^n dans la division euclidienne par P , avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.
Déterminer a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 23 ☆☆☆☆

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E démontrer que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
(on comparera $\text{Im } u + \text{Im } v$ et $\text{Im}(u+v)$, puis on pourra utiliser $u+v$ et $-v$, en remarquant que $\text{rg}(u) = \text{rg}(-u)$)

Exercice 24 ☆☆☆

Soient φ et ψ deux applications linéaires respectivement de E vers F et de F vers E telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$ et $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$;
démontrer que $F = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \psi$, et si E et F sont de dimension finie, comparer $\text{rg } \varphi$ et $\text{rg } \psi$

Exercice 25 ☆☆☆ Mines-Ponts 2018

u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{C} . On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v est nilpotent.

1. Montrer que $u+v$ est inversible ssi u est inversible.

Exercice 26 ☆☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto \text{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. ;
2. Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice A telle que :
 $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \psi(M) = \text{Tr}(AM)$.

Notes

¹ correction : $x = x - p(x) + p(x)$ donc $E \subset \text{Ker } p + \text{Im } p$, et par un calcul $0 = p(y) = p \circ p(x) = p(x) = y$ pour $y = p(x) \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$, donc $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0_E\}$

⁴ correction : 3) n'importe quelle bijection autre que l'identité
4) par exemple la dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

⁸ correction : Partant de $M, P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

arriver par noyaux emboîtés à $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ via changement de bases dans une base adaptée.

¹³ correction : contre-exemples. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

¹⁴ correction :

$$(x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2$$

¹⁵ correction : développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} r^2 - (a+b)r + ab = (r-a)(r-b)$ d'où $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

¹⁸ correction : on écrit les colonnes

¹⁹ correction :

²¹ correction : $(\text{Id}_E - f) \sum_{k=0}^{p-1} f^k = \text{Id}_E - f^p = \text{Id}_E$

$$(\text{Id}_E + f) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^k = \text{Id}_E - f^p = \text{Id}_E + (-1)^{p-1} f^p = \text{Id}_E$$

²⁵ correction : 1. Si u inversible, pour $w = u^{-1}v$, on a $u + v = u(id + w)$, et comme $v^p = 0$, on a par commutation $w^p = 0$, donc $(id + w)$ inversible d'inverse $id - w + \dots + (-1)^{p-1} w^{p-1}$.

réciroquement, $u = u + v + (-v)$ et $-v$ est nilpotent.