Méthodes à retenir :

- Pour justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il suffit de vérifier que l'intersection est réduite au vecteur nul, et que la somme des dimensions est celle de l'espace vectoriel considéré, en dimension finie.
- La notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel F par un endomorphisme est équivalente à la présence d'un bloc de zéros dans une base adaptée à une somme directe entre F et un supplémentaire.
- Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme, et la relation entre ces matrices est la formule de passage vue en PCSI.

I. Révisions de PCSI

Exercice 1 ✰ *Matrice d'application linéaire dans* $\mathbb{R}_3[X]$

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Exercice 2 ✰✰*Noyau, base image d'une application linéaire*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $f : E \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - XP'$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Justifier que $f(E) \subset E$, que peut-on en déduire sur f.
3. Justifier que $Ker(f) = \text{Vect}(X) = \{a_1 X; a_1 \in \mathbb{R}\}$.
4. Déterminer $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 ✰✰✰ *Linéarité, endo, iso, automorphisme*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, et $h : E \mapsto E, Q \longmapsto \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. On admet que h est linéaire.

1. Soit $Q \in E$ non nul. Montrer que $h(Q)$ est non nul. En déduire que h est injective.
2. h est elle un endomorphisme de E ? Un isomorphisme de E ? Un automorphisme de E ?
3. Justifier que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! Q \in \mathbb{R}_n[X]; h(Q) = P.$$

II. Sommes directes

Exercice 4 ✰

On note $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \{\lambda I_2;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. A-t-on $F \oplus G = F + G$?
3. A-t-on $F \oplus G = E$?

Exercice 5 ✰✰

Soit E un espace vectoriel quelconque et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$.
1) Démontrer que : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
Qu'en déduit-on pour la nature de f ? Illustrer géométriquement.
2) Si E est de dimension finie, sous quelle forme simple s'écrit la matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe ?
3) Donner un exemple d'endomorphisme f tel que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ mais $f \circ f \neq f$.
4) Donner un exemple d'endomorphisme f qui ne vérifie pas $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

Exercice 6 ☆☆

1. Donner la définition de deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E.
2. On considère maintenant l'espace vectoriel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{g : x \mapsto ax + b; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 7 ☆☆☆ *« matrices symétriques et antisymétriques »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{A}_n = \left\{R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); R^T = -R\right\}$ et $\mathcal{S}_n = \left\{S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); S^T = S\right\}$.

1. Justifier que toute matrice $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire dans la somme $\mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$ sous la forme : $Q = R + S$, avec $R = \dfrac{1}{2}\left(Q - Q^T\right)$ et $S = \dfrac{1}{2}\left(Q + Q^T\right)$.
2. Justifier que la décomposition précédente est unique.
3. En déduire que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B}_a = (E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de $\mathcal{A}_n$.
5. Justifier que la famille $\mathcal{B}_s = ((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$ est une base de $\mathcal{S}_n$.
6. En déduire une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

III. Sous-espaces stables

Exercice 8 ☆☆

Prouver qu'il existe un seul endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\operatorname{Ker} u$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et tel que $u(X) = 2X$.

Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?

Quels sous-espaces vectoriels stables apparaissent dans cette écriture matricielle ?

Exercice 9 ☆☆☆

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Comparer pour l'inclusion les sous-espaces vectoriels $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, $E_2 = \operatorname{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^2)$ et $E_3 = \operatorname{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^3)$.
2. Déterminer une base de E_1.
3. En déduire un supplémentaire S_1 de E_1 dans E_2 et une base adaptée à la somme directe $E_2 = E_1 \oplus S_1$.
4. En déduire un supplémentaire S_2 de E_2 dans E_3 et une base adaptée à la somme directe $E_3 = E_2 \oplus S_2$.
5. Déterminer la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus S_1 \oplus E_2$.

Exercice 10 ☆☆☆

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. On suppose que $f + f^2 + f^3 = O_{\mathcal{L}(E)}$.

1. $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \operatorname{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme $g = f_{|F}^{|F}$ induit par f sur F est un automorphisme de F.

IV. Déterminant

Exercice 11 ✰

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

Exercice 12 ✰

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(4) & \dots & \ln(n) \\ 0 & \ln(3) & \ln(4) & & \vdots \\ 0 & 0 & \ln(4) & \ddots & \ln(n) \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ln(n) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ln(n) \end{vmatrix}$;

Exercice 13 ✰

Factoriser $\Gamma = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^4 \end{vmatrix}$

Exercice 14

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det\left(M^T\right) = \det(M)$.
2. On suppose que la matrice M est antisymétrique (i.e. $M^T = -M$) et non nulle.
   (a) Montrer que si n est impair alors M n'est pas inversible.
   (b) Montrer que si $n = 2$, alors M est inversible.
   (c) Si $n = 4$, peut-on affirmer que M est inversible ? qu'elle ne l'est pas ?

Exercice 15 ✰✰✰

Calculer sous forme factorisée l'expression de

$P(x) = \det(xI_3 - M)$, où $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $xI_3 - M$ est-elle non inversible ?

Exercice 16 ✰✰✰

Soient $a, b \in \mathbb{C}^\star$ distincts.

On pose $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + ab + b^2$, et pour $n \geq 3$, $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$

Calculer D_n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice 17 ☆☆☆ *« Matrices de transvection »*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1, \ldots, C_n$ ses vecteurs colonnes, et $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, avec $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j}$.

1) Justifier que $T_{i,j,\lambda}$ est inversible.

2) A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à droite par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(MT_{i,j,\lambda})$ et $\det(M)$.

3)A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à gauche par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(T_{i,j,\lambda}M)$ et $\det(M)$.

V. Trace

Exercice 18 ☆☆ *« Application transposée »*

Rappeler la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Ecrire dans cette base la matrice de l'application linéaire $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$, puis calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 19 ☆☆ *Trace et rang d'un projecteur*

Soit p un projecteur de E de dimension n, et $r = \mathrm{rg}(p)$.
En utilisant que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$, à l'aide d'une base adaptée, démontrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 20 ☆☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. ;
2. Montrer que pour toute forme linéaire ψ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice A telle que : $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \psi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

VI. Pour aller plus loin

Exercice 21 ☆☆ *Nilpotents*

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geq 2$.

On suppose que la composée n fois $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on dit que u est nilpotent d'ordre n).

1. Justifier qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ de E tel que $u^{n-1}(\overrightarrow{x}) \neq \overrightarrow{0}$.
2. On fixe alors un tel vecteur $\overrightarrow{x}$. Justifier que la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \ldots, u^{n-1}(\overrightarrow{x}))$ est une famille libre de E.
3. En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 22 ☆☆☆☆

Soient n un entier, $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \neq 0$. En déduire que M est inversible. Calculer son inverse.
(on pourra le chercher sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & (*) \\ 0_n & B^{-1} \end{pmatrix}$)

Exercice 23 ☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est à dire tel qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est inversibles.
2. Même question pour $\mathrm{Id}_E + f$

Exercice 24 ☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u , v deux endomorphismes de E démontrer que
$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
(on comparera $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Im}(u+v)$, puis on pourra utiliser

$u+v$ et $-v$, en remarquant que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(-u)$)

Exercice 25 ☆☆☆

Soient φ et ψ deux applications linéaires respectivement de E vers F et de F vers E telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$ et $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$;
démontrer que $F = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\,\psi$, et si E et F sont de dimension finie, comparer $\mathrm{rg}\,\varphi$ et $\mathrm{rg}\,\psi$

Exercice 26 ☆☆☆ *Mines-Ponts 2018*

u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v est nilpotent.

1. Montrer que $u+v$ est inversible ssi u est inversible.

Notes

[5] correction : 3) n'importe quelle bijection autre que l'identité
4) par exemple la dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

[9] correction : Partant de M, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

arriver par noyaux emboités à $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ via changement de bases dans une base adaptée.

[14] correction : contre-exemples. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[15] correction :

$(x+1)(x^2-4x+4) = (x+1)(x-2)^2$

[16] correction : *développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient* $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ $r^2 - (a+b)r + ab = (r-a)(r-b)$ *d'où* $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

[19] correction : on écrit les colonnes

[21] correction :

[23] correction : $(\mathrm{Id}_E - f)\sum_{k=0}^{p-1} f^k = \mathrm{Id}_E - f^p = \mathrm{Id}_E$

$$(\mathrm{Id}_E + f)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k f^k = \mathrm{Id}_E - f^p = \mathrm{Id}_E + (-1)^{p-1} f^p = \mathrm{Id}_E$$

[26] correction : 1. Si u inversible, pour $w = u^{-1}v$, on a $u + v = u(id + w)$, et comme $v^p = 0$, on a par commutation $w^p = 0$, donc $(id + w)$ inversible d'inverse $id - w + \cdots + (-1)^{p-1}w^{p-1}$.

réciproquement, $u = u + v + (-v)$ et $-v$ est nilpotent.