Exercice 1 *Polynômes et matrices, projection, symétries*

$E = \mathbb{R}_2[X]$, soit $f : P \longmapsto P - XP'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
3. Déterminer le noyau de f.
4. Déterminer l'image de f.
5. A-t-on $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice 2 *Séries de fonctions (CVN, CVU, CVS)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : t \longmapsto \dfrac{t^n}{n}$.

1. la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle simplement sur $[-1,1]$?
2. Justifier que u_n est continue.
3. Justifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.
4. Que peut-on en déduire pour la somme $S : t \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$?
5. la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle normalement sur $]-1,1[$?
6. la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]-1,1[$?

Exercice 3 *Matrices orthogonales*

On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Vérifier que la droite D dirigée par $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ est stable par f.
3. Montrer que la restriction de f au plan $D^\perp$ est une rotation, dont on précisera l'angle.

Exercice 4 *Suites adjacentes*

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 > v_0 > 0$ et : $\forall n > 0$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n, $u_n > v_n$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont monotones.
3. Montrer que pour tout n, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{u_n - v_n}{2}$.
4. Conclure sur la nature (convergence ?) des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 5 *Gram-Schmidt, bases orthonormales*

1. Pour $i \in [\![0, 2]\!]$, on pose $p_i : t \longmapsto t^i$.
2. La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthogonale pour le produit scalaire $\langle \, | \, \rangle : (f, g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ de $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$?
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(p_0, p_1, p_2)$.
4. Calculer
$$\Delta = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \left\{ \int_0^1 (\mathrm{e}^t - a - bt - ct^2)^2 \mathrm{d}t \right\}.$$

Exercice 6 *Trace ; projection*

Soit $F = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

1. Déterminer une base de F.
2. Justifier que $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I_2)$ est un supplémentaire de F dans $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Détermienr la matrice dans la base canonique de E de la projection p sur F parallèlement à G

Exercice 7 *Séries entières et équa diff*

On considère l'équation différentielle
$$(E) : ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2})$$
a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière sur un voisinage de 0.
b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et en déduire une expression plus simple de v.

Exercice 8 *Probas Bayes/probas totales/ probas composées*

Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant
$$\mathbf{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p$$

1. Calculer l'espérance de X_k.
2. On pose
$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$
En calculant de deux façons l'espérance de Y_n, déterminer $p_n = \mathbf{P}(Y_n = 1)$.
3. Quelle est la limite de p_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 9 *Calcul de déterminant*

Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On pose $f : x \longmapsto \det(A + xJ)$.

1. En retranchant la première ligne aux autres lignes, justifier l'existence de deux constantes α et β telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha + \beta x$$
.
2. En utilisant la propriété sur le déterminant d'une transposée et la n-linéarité par rapport aux colonnes, justifier que montrer que :
$$\det(A - xJ) = \det(-A^T - xJ) = (-1)^{2n} \det(\, ^tA + xJ)$$
3. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$$
.
4. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 10 *TCD*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec} x \in [0, 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0, 1]$.
2. Pour $n \geq 1$, u_n est-elle intégrable sur $[0, 1]$?
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 11 *Equivalents et nature intégrale généralisée*

On considère la fonction
$$f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, t^x\ \mathrm{d}t$$

1. (a) Pour $x > -1$,on pose $g_x : t \longmapsto \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x$. Déterminer des équivalents de g_x en 0^+ et en 1^-.
   (b) En déduire que f est bien définie.
2. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis que
$$\forall x > -1,\ f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$
   (b) En remarquant que $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est bornée sur $]0, 1[$ par une constante $M > 0$ (que l'on ne cherchera pas à calculer), montrer que :
$$\forall x > -1,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x+1}$$

(c) En déduire que f est la fonction telle que

$$\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

Exercice 12 *Equations différentielles*

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - y = 1 - t$$

2. Résoudre le système différentiel

$$(S_2) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$$

Exercice 13 *Matrices symétriques (concours commun des mines)*

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormale B. On note $[a]$ la colonne des coordonnées du vecteur a dans la base B. Soit $a \in E$, différent du vecteur nul.

a) Montrer que $M = \dfrac{1}{[a]^T[a]}[a][a]^T$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $Vect(a)$.

b) Écrire en fonction de M la matrice de :

i) la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(a)$;

ii) la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$;

iii) le projecteur orthogonal par rapport à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$.

Problème 1 *CCP PC 2016*

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0,1)$, $A_1 = (1,1)$ et $A_2 = (1,0)$.
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x + y \geq 1\}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :
$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1$, $B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2$ et $C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t)$.

1. Soit $t \in [0,1]$.

1.a) Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de t.

1.b) Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

1.c) Montrer que $C(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)A_k$.

2.) Montrer que $\mathcal{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3.) Soit $\mathcal{C}$ l'arc paramétré à partir de la fonction $f : \begin{array}{ccc} t & \mapsto & C(t) \\ [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \end{array}$.

3.a) Justifier que tous les points de $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{T}$.

3.b) Pour tout $t \in [0,1]$, déterminer un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{D}_t$ à $\mathcal{C}$ en $C(t)$.

3.c) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, le segment $[A(t), B(t)]$ est inclus dans $\mathcal{D}_t$.

3.d) Représenter dans un même repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$, la partie $\mathcal{T}$ et les segments $[A(t), B(t)]$ pour $t = 0$, $t = 1/2$ et $t = 1$.

Exercice 14

1. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral montrer que

$$\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24} \cos(t)\ \mathrm{d}t$$

2. En déduire l'inégalité :

$$\forall x \in [0, \pi/2],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

3. Montrer que

$$\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 15

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
3. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$.
   Déterminer l'application réciproque de g.

Problème 2 *corrigé CCP PC 2016*

PARTIE 1. GEOMETRIE

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0,1)$, $A_1 = (1,1)$ et $A_2 = (1,0)$.
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x+y \geq 1\}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1-t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :
$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1$, $B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2$ et $C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t)$.

1. Soit $t \in [0,1]$.

1.a) $\boxed{p_{0,2}(t) = \binom{2}{0} t^0(1-t)^2 = (1-t)^2}$, $\boxed{p_{1,2}(t) = \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 = 2t(1-t)}$, et $\boxed{p_{2,2}(t) = \binom{2}{2} t^2(1-t)^0 = t^2}$.

1.b) $\boxed{A(t) = (1-t)A_0 + tA_1 = (t,1)}$, $\boxed{B(t) = (1-t)A_1 + tA_2 = (1,1-t)}$ et, $\boxed{C(t) = (1-t)A(t) + tB(t) = (2t-t^2, 1-t^2)}$.

1.c) On a alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)A_k = (1-t)^2A_0 + 2t(1-t)A_1 + t^2A_2 = (2t-t^2, 1-t^2) = C(t)$.

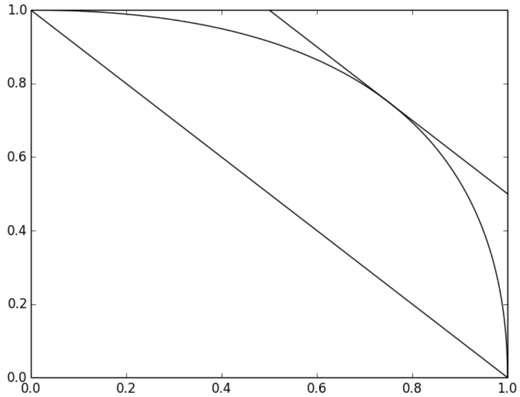
2.) Soit $(A,B) \in \mathcal{T}^2$, soit $\lambda \in [0,1]$, posons $C = \lambda A + (1-\lambda)B$, alors, $A = (x,y)$, $B = (x',y')$ avec $(x,y,x',y') \in [0,1]^4$ et $x+y \geq 1$, $x'+y' \geq 1$.
Ainsi, $C = (\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y')$ et $0 \leq \lambda x + (1-\lambda)x' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$ car x et y sont entre 0 et 1, de même, $0 \leq \lambda y + (1-\lambda)y' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$, de plus, $\lambda x + (1-\lambda)x' + \lambda y + (1-\lambda)y' = \lambda(x+y) + (1-\lambda)(x'+y') \geq \lambda + (1-\lambda) = 1$, $x+y \geq 1$ et $x'+y' \geq 1$.
En conclusion, $\boxed{\mathcal{T} \text{ est donc une partie convexe de } \mathbb{R}^2}$.

3.) Soit $\mathcal{C}$ l'arc paramétré à partir de la fonction $f : \begin{array}{ccc} t & \mapsto & C(t) \\ [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \end{array}$.

3.a) Soit $t \in [0,1]$, $C(t) = (2t-t^2, 1-t^2) \in [0,1]^2$ car $t \in [0,1]$, donc, $t^2 \in [0,1] \Rightarrow 1-t^2 \in [0,1]$.
La fonction $f : t \mapsto 2t-t^2$, est dérivable sur $[0,1]$, et, $f'(t) = 2-2t = 2(1-t) \geq 0$ sur $[0,1]$, or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc, $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \in [0,1]$.
De plus, $2t - t^2 + 1 - t^2 = 1 + 2t(1-t) \geq 1$, car $t(1-t) \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{tous les points de } \mathcal{C} \text{ sont dans } \mathcal{T}}$.

3.b) Pour tout $t \in [0,1]$, $\boxed{\text{un vecteur directeur de la tangente } \mathcal{D}_t \text{ à } \mathcal{C} \text{ en } C(t) \text{ est } (2-2t, -2t)}$ car, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(t) = (2-2t, -2t) \neq (0,0)$.

3.c) Soit $t \in [0,1]$, une équation de la droite $\mathcal{D}_t$ est : $\begin{vmatrix} x-(2t-t^2) & 2-2t \\ y-(1-t^2) & -2t \end{vmatrix} = 0 \iff t(x-2t+t^2) + (1-t)(y-1+t^2) = 0$.
Et, $A(t) \in \mathcal{D}_t$, car, $t(t-2t+t^2) + (1-t)(1-1+t^2) = 0$, $B(t) \in \mathcal{D}_t$, car, $t(1-2t+t^2) + (1-t)(1-t-1+t^2) = 0$.
$A(t)$ et $B(t)$ sont sur la droite $\mathcal{D}_t$, donc, pour tout $t \in [0,1]$, $\boxed{\text{le segment } [A(t), B(t)] \text{ est inclus dans } \mathcal{D}_t}$



3.d)

Problème 3 *PT C 2016*

Partie I

Soient b et c deux réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

1. On suppose, dans cette question, que : $b^2 - 4\,c > 0$.

   (a) Donner les racines r_1 et r_2 du trinôme $r^2 + b\,r + c$, et rappeler les relations coefficients-racines (qui permettent d'exprimer en fonction de b et c : $r_1 + r_2$ et $r_1\,r_2$).

   (b) Montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{r_i\,t}$, $i \in \{1, 2\}$, est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Vérifier que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:

   $$(y' - r_1\,y)' - r_2\,(y' - r_1\,y) = 0$$

   (d) Montrer qu'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:

   $$y'\,(t) - r_1\,y\,(t) = C_2\,e^{r_2\,t} \quad , \quad y'\,(t) - r_2\,y\,(t) = C_1\,e^{r_1\,t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   (e) En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est de la forme :

   $$t \mapsto \lambda\,e^{r_1\,t} + \mu\,e^{r_2\,t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   (f) *Étude d'un cas particulier* : $b = 0$, $c = -16$.

      i. Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ dans ce cas particulier.

      ii. On adjoint à l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ les conditions initiales :

      $$y\,(0) = 2\,\mathrm{e} \quad , \quad y'\,(0) = 0$$

      Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ admet alors l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$? On demande d'expliciter ces solutions.

2. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :

   $$\left(2\,x - y^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 16\,\varphi = 0 \quad (E)$$

   sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 < 2x\right\}$.

   (a) Représenter D. On admettra qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout (u, v) de Δ, associe : $h\,(u, v) = \left(\dfrac{u^2 + v^2}{2}, v\right)$. Justifier, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.

(c) Montrer que la fonction φ, de classe C^2 sur D, est solution de (E) sur D si et seulement si la fonction ψ, définie, pour tout (u, v) de Δ, par $\psi(u, v) = (\varphi \circ h)(u, v)$, est solution sur Δ de (E') :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\,\psi = 0$$

(d) Déterminer toutes les solutions de (E') sur Δ.

Partie II

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu)^{n+1}}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x : $x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right)$.
2. Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de I_n. Que vaut I_0 ?
3. On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \dfrac{(2n-1)\,I_{n-1}}{2n}$.
   (On pourra intégrer par parties.)

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

Partie III

1. Soit x un réel tel que : $|x| \leq \dfrac{1}{4}$. Exprimer, en fonction de x, les deux solutions $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ de l'équation :

$$\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} + x = 0$$

2. Donner le domaine de définition $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ de la fonction f qui, à tout réel x de $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$, associe :

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

3. Pour tout réel non nul α, rappeler le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x de $]-1, 1[$, associe $(1+x)^{\alpha}$.
4. Donner le développement en série entière de la fonction f, en l'écrivant sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}_S$$

où $\mathcal{D}_S$ est un domaine de $\mathbb{R}$ à préciser. On donnera la valeur de S_0, et on exprimera les coefficients S_n, $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de n, sous forme de produit.

5. Rappeler la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série produit ?
6. À l'aide de la question II.1, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\, S_{n-k} \qquad (\star)$$

7. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2\,n-2}{n-1}$, où $\dbinom{2\,n-2}{n-1}$ est le coefficient binomial « $n-1$ parmi $2\,n-2$ ».
8. Étudier la convergence de la série de terme général S_n.
9. On appelle « mot de Dyck » une chaîne de $2\,n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^*$, formée de n lettres A et n lettres B, telle que, lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de A soit toujours supérieur ou égal au nombre de B. Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : AB. Les mots de Dyck de longueur 4 sont : $AABB$ et $ABAB$. $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck, alors que BA ou $AABBBA$ n'en sont pas.
Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par C_n le nombre de mots de Dyck de $2\,n$ lettres.
   (a) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4.
   (b) On pose : $C_0 = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k}$.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = S_{n+1}$, et conclure.

La première partie présente une méthode originale montrant que toute solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est nécessairement d'une forme donnée, sans recourir aux démonstrations classiques habituellement basées sur du calcul matriciel.

La seconde partie étudie la convergence d'intégrales généralisées.

La troisième partie développe des résultats liés aux nombres de Catalan d'ordre n, S_{n+1} ou C_n ($n \in \mathbb{N}$), qui sont couramment utilisés en modélisation numérique (éléments finis). Le domaine géométrique auquel on s'intéresse est discrétisé et peut être approché par une surface polygonale par morceaux. Pour obtenir une bonne approximation géométrique, on divise chaque polygone en triangles. Le nombre de configurations possibles pour trianguler un polygone convexe à $n+2$ sommets est donné par le nombre de Catalan d'ordre n.

Exercice 18 *e3a CCP PSI 2015 exo 3*

On pose, lorsque cela est possible

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t^2-1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
3. Calculer $f(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi\ :\ u>0 \mapsto \mathrm{ch}(u)$.
4. Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
5. Vérifier que f est positive sur I.
6. Montrer que f est décroissante sur I.
7. Prouver que f est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.
8. Soit $x \in I$. Démontrer la relation
$$f(x+2) = \frac{x}{x+1}f(x)$$
On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.
9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.
10. Pour tout réel $x>0$, on pose
$$\phi(x) = xf(x)f(x+1)$$
Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
11. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.
12. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que
$$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
13. En utilisant des parties entières, prouver que
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$
14. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
15. Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.