Proposition 1 (Règle de d'Alembert).

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes **tous non nuls**.

- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ et si $\ell \in [0,1[$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ est (grossièrement) divergente.
- Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 1$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n$ peut être convergente ou divergente.

Définition 1 (Série exponentielle).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la somme de la série absolument convergente $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est appelée **exponentielle de** z, et est notée $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

Proposition 2 (Critère spécial des séries alternées).

Supposons

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée (i.e. $((-1)^n u_n)$ a un signe constant) ;
2. la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$;

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ **converge**.

En outre la suite (R_N) des restes est du signe de u_0, et $\forall N \in \mathbb{N},\ |R_N| \leq |u_{N+1}|$, où $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

Théorème 3 (Formule de Stirling).

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Théorème 4 (produit de Cauchy).

Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries **absolument convergentes**, alors leur produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ est aussi absolument convergent, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$$

I. Calculs de sommes de séries convergentes

Exercice 1

Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$;

Exercice 2

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$?

Exercice 3

Discuter selon la valeur du paramètre réel a la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^a}$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Justifier que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ admet une limite finie γ.
2. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ converge et calculer sa somme en fonction de γ.
3. Montrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)n}$ et déterminer sa somme.

Exercice 5

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

Exercice 6

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

Exercice 7 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 8 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \geq 1$,

$$v_n = \left(n + \left((n-1) + \left(\cdots + (2+1^{\frac{1}{4}})\ldots\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Donner la limite de la suite (v_n).
Montrer que $v_n = O(n^{\frac{1}{4}})$.

Notes

[2] correction : DV : faire un DL, le cssa ne s'applique pas !

[7] correction : $|u_{n+1}| \to 0$, par DL2, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$

[8] correction : diverge car $v_n^4 \geq n$, par réc $v_n^l e(2n)^{1/4}$ car $(2x+2)^{1/4} \leq x$ pour $x \geq 2$