Méthodes à retenir :

- Pour étudier un arc paramétré par $t \mapsto (x(t), y(t))$:
  1. on détermine son ensemble de définition
  2. on recherche d'éventuelles périodocités
  3. on recherche d'éventuelles symétries en cas de parité ou imparité de x et y
  4. on établit le tableaux de variations simultanées dont les colonnes sont $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$.
  5. on repère des éventuelles asymptotes verticales ou tangentes horizontales
  6. On trace

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Trouver une équation cartésienne de l'ensemble des points paramétrés par : $\begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3 \end{cases}$

Exercice 2 ☆

Paramétrer la droite du plan passant par le point $A(2, -1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(-1, 4)$

Exercice 3 ☆

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$ au point $M = (1/\sqrt{2}; 1/2)$.

Exercice 4 ☆

Soit U, V deux applications de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On note $< \mid >$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $\varphi : t \longmapsto < U(t) | V(t) >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 = 3$ au point $M = (1; 1)$.

Exercice 6

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ au point $A = (0; 1/2; 0)$.

II. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆ ☆

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(2t) \\ y(t) &= \cos(t) \end{cases}$$

Exercice 8 ☆ ☆ *Lissajous*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(2t) \\ y(t) &= \sin(3t) \end{cases}$$

Exercice 9 ☆☆ *mouvement circulaire*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. Proposer une interprétation cinématique.

III. Exercices

Exercice 10 ☆☆

Que réprésentent les courbes planes paramétrées :
$C_1 : \begin{cases} x(t) &= -1+2t \\ y(t) &= 2t \end{cases}$, $C_2 : \begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) \\ y(t) &= 3\sin t \end{cases}$,
$C_3 : \begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) \\ y(t) &= 3\cos t \end{cases}$?

Exercice 11 ☆☆ *Pour les amoureux des courbes*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin^3 t \\ y(t) &= \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

Exercice 12 ☆☆ *Cycloïde*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t-\sin t, 1-\cos t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Pour quelles valeurs de t la coordonnée selon $(0y)$ de f' s'annule-t-elle ?
3. Représenter la trajectoire d'un mobile dont la position à l'instant t est $f(t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$. On précisera le comportement local au voisinage de $f(0)$.
4. Etudier la courbe au voisinage du point singulier de paramètre 0.

Exercice 13 ☆☆ *Néphroïde*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= 3\cos t - \cos(3t) \\ y(t) &= 3\sin t - \sin(3t) \end{cases}$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆

Soient $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

On considère l'application

$\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto \left\| A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2$.

Justifier que δ est admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de δ en (a,b), à l'aide de a, b , C_1, C_2, Y_0 et le produit scalaire $<\ |\ >$ usuel associé à la norme euclidienne $\|\ \|_2$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pourra réécrire $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$, en notant C_1 et C_2 les colonnes de A.

Exercice 15 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.
Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I.

Exercice 16 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(A - tI_n)$
1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir $\varphi(t)$, $\det A$ et $\operatorname{tr} A$.
2) Justifier que l'application φ est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 17 ☆☆ ☆ *Mines-Ponts*

a) Etudier la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$

b) Donner une équation de la tangente et de la normale en $M(t)$.

c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

Exercice 18 ☆☆ *Pour les amoureux des courbes*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin^3 t \\ y(t) &= \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

Exercice 19 ☆☆☆☆ *Centrale avec Python*

On pose le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{\cos^3(\frac{t}{3})}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(\frac{t}{3})}\overrightarrow{j}$

1) a) Donner le domaine de définition D_f de f

b) On note C l'arc paramétré (D_f, f). Montrer que f parcourt C sur un intervalle contenant 0

2) Tracer C à l'aide de l'outil informatique. Expliquer la symétrie observée

3) Soit D une droite passant par O

a) À l'aide de la courbe tracée conjecturer le nombre de points d'intersection entre D et C. (Distinguer deux cas)

b) Montrer la conjecture par le calcul

4) On pose D_0 la droite d'équation $y = 0$

a) Donner les équations des tangentes à C aux points d'intersection entre C et D_0.

b) Tracer ces tangentes sur l'outil informatique. Faire une conjecture sur le triangle formé par ces tangentes.

c) Démontrer cette conjecture.

5) D désigne encore une droite passant par O

a) Généraliser la conjecture précédente (les tangentes aux points d'intersection de D et C forment un triangle équilatéral)

Exercice 20 ☆☆☆ *Folium de Descartes*

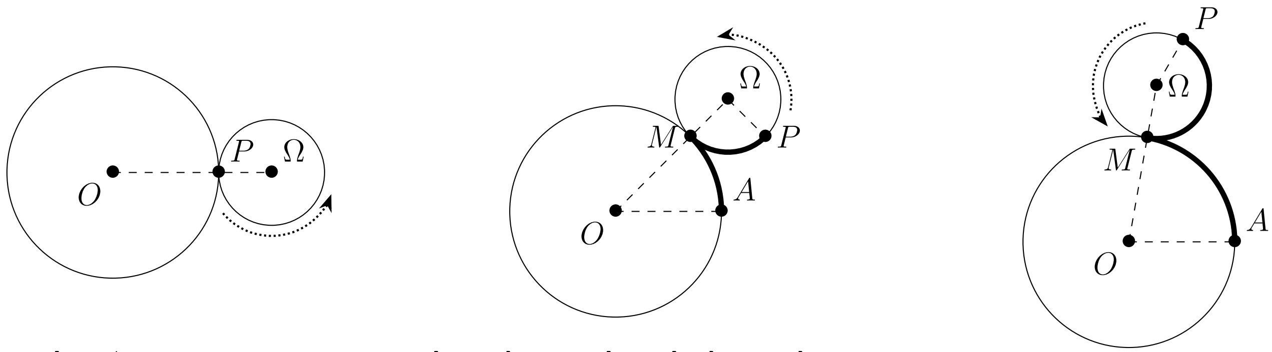
Soit $(\mathcal{F})$ la courbe de représentation paramétrique $M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\dfrac{3t}{t^3+1}, \dfrac{3t^2}{t^3+1}\right)$

1. Préciser le domaine de définition D des fonctions x et y.
2. Si $t \in D - \{0\}$, comparer $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et $M(t)$. En déduire qu'on peut restreindre l'étude à $t \in]-1;1]$.
3. Etudier les variations des fonctions x et y sur $]-1;1]$, en précisant les valeurs ou limites aux bornes.
4. Déterminer la limite α de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers (-1) .
5. Etudier le comportement de $y(t) - \alpha x(t)$ quand t tend vers (-1). Qu'en déduit-on pour la courbe $(\mathcal{F})$?
6. Déterminer le point $A = \lim\limits_{t\to+\infty} M(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} M(t)$
7. Ecrire $\overrightarrow{AM(t)}$ sous la forme $\overrightarrow{AM(t)} = \varphi(t).\overrightarrow{F(t)}$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \overrightarrow{L} \neq \overrightarrow{0}$
8. En déduire la tangente à la courbe au point-limite A.
9. Tracer la courbe $(\mathcal{F})$, en plaçant les points et tangentes remarquables.

V. Problème de concours

ATS 2019

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon $1/2$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1. La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarque que la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{MP}$.



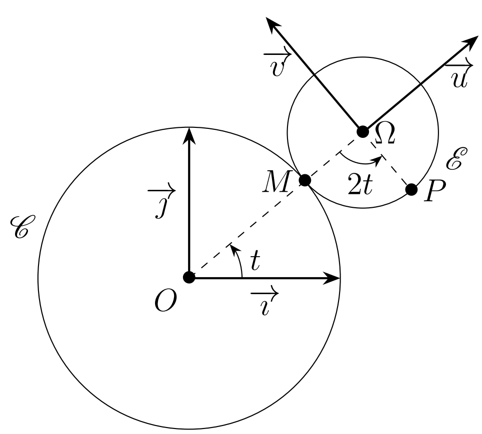
Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

1. Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM},\right)$ satisfont l'égalité $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right) = 2\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM},\right)$.

   Afin d'étudier la trajectoire du point P, on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{E}$ le cercle de rayon $1/2$ extérieurement tangent au cercle $\mathscr{C}$ en M. Le centre du cercle $\mathscr{E}$ est noté Ω. D'après la question 1, le point P est le point du cercle $\mathscr{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathscr{P} = (\Omega,\vec{u},\vec{v})$ où

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath} \end{cases}.$$



2. Donner les coordonnées du point Ω dans le repère $\mathscr{R}$.
3. Démontrer que le repère $\mathscr{P}$ est orthonormal.
4. Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right)$$

5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{P}$. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont

$$\left(3\cos t - 2(\cos t)^3, 2(\sin t)^3\right).$$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie** A **n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée $\mathscr{N}$ et décrite par le point P. On considère donc les fonctions x et y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = 3\cos t - 2(\cos t)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2(\sin t)^3$$

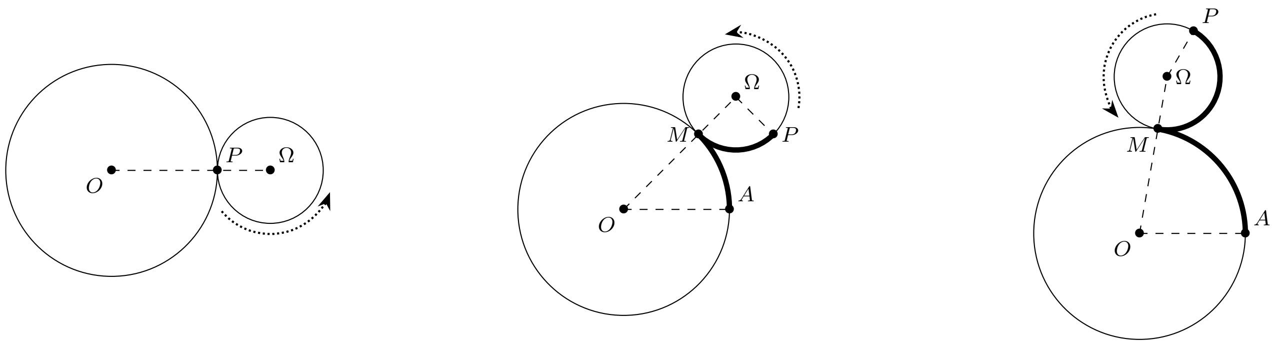
de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(t) = (x(t), y(t))$.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.
2. Montrer que pour tout réel t, les points $P(t+\pi)$ et $P(-t)$ se déduisent du point $P(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe $\mathscr{N}$.
3. Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
4. Donner une représentation graphique de la courbe $\mathscr{N}$ en y faisant apparaître pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $P(0)$ est horizontale.

Notes

[20] correction :

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon $1/2$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1. La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarque que la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{MP}$.



Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

1. **Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ satisfont l'égalité $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)=2\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$.**

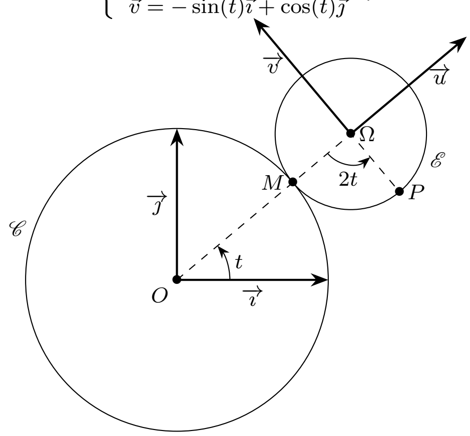
   $\widehat{AM}=\widehat{MP}$ et $OA=1=2\times\dfrac{1}{2}=2\times\Omega M$ donc

$$\widehat{AM}=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)\times OA=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)\times 2\times\Omega M=\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)\times\Omega M$$

   donc
$$\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)=2\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right).$$

   Afin d'étudier la trajectoire du point P, on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathscr{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $t\in\mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos(t),\sin(t))$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{E}$ le cercle de rayon $1/2$ extérieurement tangent au cercle $\mathscr{C}$ en M. Le centre du cercle $\mathscr{E}$ est noté Ω. D'après la question 1, le point P est le point du cercle $\mathscr{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega P}\right)=2t$. Enfin, on considère le repère $\mathscr{P}=(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ où

$$\begin{cases}\vec{u}=\cos(t)\vec{\imath}+\sin(t)\vec{\jmath}\\ \vec{v}=-\sin(t)\vec{\imath}+\cos(t)\vec{\jmath}\end{cases}.$$



2. **Donner les coordonnées du point Ω dans le repère $\mathscr{R}$.**

   $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ sont tangents au point M donc O, M et Ω sont alignés dans cet ordre. On en déduit que $\|\overrightarrow{O\Omega}\|=\|\overrightarrow{OM}\|+\|\overrightarrow{M\Omega}\|=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.
   D'autre part, $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{O\Omega}\right)=\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}\right)=t$ et $\left(\vec{\jmath},\overrightarrow{O\Omega}\right)=(\vec{\jmath},\vec{\imath})+\left(\vec{\imath},\overrightarrow{O\Omega}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+t$ d'où

$$\begin{cases}\overrightarrow{O\Omega}\cdot\vec{\imath}=\|\overrightarrow{O\Omega}\|\times\|\vec{\imath}\|\times\cos\left(\left(\vec{\imath},\overrightarrow{O\Omega}\right)\right)=\dfrac{3}{2}\cos(t)\\ \overrightarrow{O\Omega}\cdot\vec{\jmath}=\|\overrightarrow{O\Omega}\|\times\|\vec{\jmath}\|\times\cos\left(\left(\vec{\jmath},\overrightarrow{O\Omega}\right)\right)=\dfrac{3}{2}\cos(t)=\dfrac{3}{2}\sin(t)\end{cases}$$

Finalement $\Omega = \left(\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)_{\mathscr{R}}$.

3. **Démontrer que le repère $\mathscr{P}$ est orthonormal.**

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \cos(t)\times(-\sin(t)) + (-\sin(t))\times\cos(t) = 0 \end{cases}$$

Le repère $\mathscr{P}$ est orthonormal.

4. **Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont**

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right)$$

Commençons par remarquer que $\overrightarrow{\Omega O} = -\frac{3}{2}\cos(t)\vec{\imath} - \frac{3}{2}\sin(t)\vec{\jmath} = -\frac{3}{2}\vec{u}$. Comme O, M et Ω sont alignés dans cet ordre, $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega O}, \vec{u}\right) = (-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$ et enfin $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{v}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}\right) + (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega P}\cdot\vec{u} = \|\overrightarrow{\Omega P}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\left(\overrightarrow{\Omega P}, \vec{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\left(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}\right)\right) \\ \overrightarrow{\Omega P}\cdot\vec{v} = \|\overrightarrow{\Omega P}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\left(\overrightarrow{\Omega P}, \vec{v}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\left(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{v}\right)\right) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega P}\cdot\vec{u} = \frac{1}{2}\cos(-2t + \pi) = -\frac{\cos(2t)}{2} \\ \overrightarrow{\Omega P}\cdot\vec{v} = \|\overrightarrow{\Omega P}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\left(\overrightarrow{\Omega P}, \vec{v}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(-2t + \frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{\sin(2t)}{2} \end{cases}$$

Finalement $P = \left(\frac{-\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right)_{\mathscr{P}}$.

5. **Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{P}$. Démontrer que**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Nous avons $N = (x, y)_{\mathscr{R}} = (X, Y)_{\mathscr{P}}$ donc $\overrightarrow{ON} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\Omega N} = X\vec{u} + Y\vec{v}$.
Puisque $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}$ nous avons

$$\begin{cases} \overrightarrow{ON}.\vec{\imath} = x = \left(\frac{3}{2}\cos(t)\vec{\imath} + \frac{3}{2}\sin(t)\vec{\jmath} + X\left(\cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}\right) + Y\left(-\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath}\right)\right)\cdot\vec{\imath} \\ \overrightarrow{ON}.\vec{\jmath} = y = \left(\frac{3}{2}\cos(t)\vec{\imath} + \frac{3}{2}\sin(t)\vec{\jmath} + X\left(\cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}\right) + Y\left(-\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath}\right)\right)\cdot\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}\cos(t) + X\cos(t) - Y\sin(t) \\ y = \frac{3}{2}\sin(t) + X\sin(t) + Y\cos(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. **En déduire que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont**

$$\left(3\cos(t) - 2\left(\cos(t)\right)^3, 2\left(\sin(t)\right)^3\right).$$

On applique le résultat précédent, vrai pour tout point du plan, au point P en utilisant les relations trigonométriques $\cos(2t) = 2(\cos(t))^2 - 1$, $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\cos(2t)}{2} \\ -\frac{\sin(2t)}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(t) - \frac{\cos(t)\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(t)\sin(2t)}{2} \\ \frac{3}{2}\sin(t) - \frac{\sin(t)\cos(2t)}{2} - \frac{\cos(t)\sin(2t)}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(t) - \frac{2(\cos(t))^3 - \cos(t)}{2} + \frac{(\sin(t))^2\cos(t)}{2} \\ \frac{3}{2}\sin(t) - \frac{\sin(t)(1 - 2(\sin(t))^2)}{2} - \frac{2\sin(t)(1 - (\sin(t))^2)}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 2\cos(t)^3 \\ 2(\sin(t))^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement $P = \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 2\cos(t)^3 \\ 2(\sin(t))^3 \end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée $\mathscr{N}$ et décrite par le point P. On considère donc les fonctions x et y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = 3\cos(t) - 2\,(\cos(t))^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2\,(\sin(t))^3$$

de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(t) = (x(t), y(t))$.

1. **Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.**
Les fonctions x et y sont $2\pi-$périodiques car les fonctions $\cos$ et $\sin$ son $2\pi-$périodiques :
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x\,(t+2\pi) = 3\cos(t+2\pi) - 2\,(\cos\,(t+2\pi))^3 = 3\cos(t) - 2\cos(t)^3 = x(t) \\ y\,(t+2\pi) = 2(\sin(t+2\pi))^3 = 2(\sin(t))^3 = y(t) \end{cases}$$

2. **Montrer que pour tout réel t, les points $P(t+\pi)$ et $P(-t)$ se déduisent du point $P(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe $\mathscr{N}$.**
Les points $P(t+\pi)$ et $P(t)$ sont symétriques par rapport au point $(0,0)$ car
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x\,(t+\pi) = 3\cos(t+\pi) - 2\,(\cos\,(t+\pi))^3 = -3\cos(t) + 2\cos(t)^3 = -x(t) \\ y\,(t+\pi) = 2(\sin(t+\pi))^3 = -2(\sin(t))^3 = -y(t) \end{cases}$$

Les points $P(-t)$ et $P(t)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = 0$ car

$$\begin{cases} x\,(-t) = 3\cos(-t) - 2\,(\cos\,(-t))^3 = 3\cos(t) - 2\cos(t)^3 = x(t) \\ y\,(-t) = 2(\sin(-t))^3 = -2(\sin(t))^3 = -y(t) \end{cases}$$

On peut restreindre l'étude à l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car

(a) la symétrie d'axe $y = 0$ permet de prolonger, sans calcul supplémentaire, l'étude sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(b) puis la symétrie par rapport au point $(0,0)$ permet de prolonger, sans calcul supplémentaire, l'étude sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;

(c) enfin la $2\pi-$périodicité permet de prolonger, sans calcul supplémentaire, l'étude sur $\mathbb{R}$.

3. **Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.** Les fonctions x et y sont dérivables sur I et

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t) + 6\sin(t)(\cos(t))^2 \\ y'(t) = 6\cos(t)(\sin(t))^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 3\sin(t)\cos(2t) \\ y'(t) = 6\cos(t)(\sin(t))^2 \end{cases}$$

Sur l'intervalle I, nous avons

$$\begin{cases} x'(t) = 0 & \Leftrightarrow & \sin(t) = 0 \text{ ou } \cos(2t) = 0 & \Leftrightarrow & t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}\right\} \\ y'(t) = 0 & \Leftrightarrow & \cos(t) = 0 \text{ ou } \sin(t) = 0 & \Leftrightarrow & t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$$

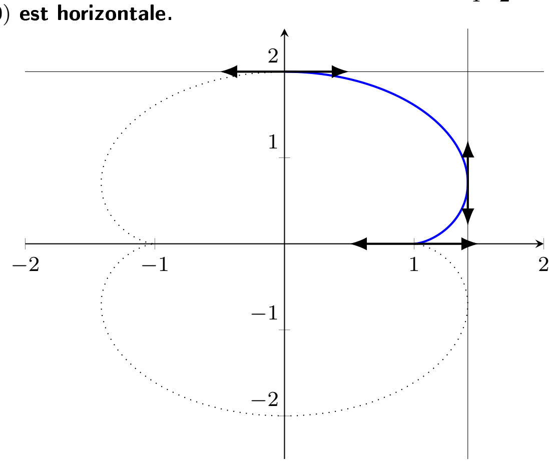
puis, nous pouvons étudier le signe de x' et y'.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$+$		$+$	1
$2t$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos 2t$	0	$+$	0	$-$	-1
signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	-3
$\cos t$	1	$+$		$+$	0
$(\sin t)^2$	0	$+$		$+$	1
signe de $y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$+$	0

Nous obtenons le tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
signe de $x'(t)$	0	$+$	0	$-$	-3
variations de x	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
signe de $y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$+$	0
variations de y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	2

4. **Donner une représentation graphique de la courbe $\mathscr{N}$ en y faisant apparaître pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $P(0)$ est horizontale.**



Représentation graphique de la courbe $\mathscr{N}$ (trait plein : $t \in I$; pointillé : $t \in [0; 2\pi]\backslash I$).

——————————-