

Méthodes à retenir :

- Pour étudier un arc paramétré par $t \mapsto (x(t), y(t))$:
 1. on détermine son ensemble de définition
 2. on recherche d'éventuelles périodicités
 3. on recherche d'éventuelles symétries en cas de parité ou imparité de x et y
 4. on établit le tableaux de variations simultanées dont les colonnes sont $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$.
 5. on repère des éventuelles asymptotes verticales ou tangentes horizontales
 6. On trace

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Trouver une équation cartésienne de l'ensemble des points paramétrés par : $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$

Exercice 2 ☆

Paramétrer la droite du plan passant par le point $A(2, -1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(-1, 4)$

Exercice 3 ☆

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$ au point $M = (1/\sqrt{2}; 1/2)$.

Exercice 4 ☆

Soit U, V deux applications de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 .

Montrer que $\varphi : t \mapsto \langle U(t) | V(t) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Exercice 5

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 = 3$ au point $M = (1; 1)$.

Exercice 6

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ au point $A = (0; 1/2; 0)$.

II. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆ ☆

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Exercice 8 ☆ ☆ Lissajous

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

Exercice 9 ☆ ☆ mouvement circulaire

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t , les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. Proposer une interprétation cinématique.

III. Exercices

Exercice 10 ☆☆

Que représentent les courbes planes paramétrées :

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = -1 + 2t \\ y(t) = 2t \end{cases}, C_2 : \begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases},$$

$$C_3 : \begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 3 \cos t \end{cases} ?$$

Exercice 11 ☆☆ Pour les amoureux des courbes

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

Exercice 12 ☆☆ Cycloïde

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
2. Pour quelles valeurs de t la coordonnée selon ($0y$) de f' s'annule-t-elle ?
3. Représenter la trajectoire d'un mobile dont la position à l'instant t est $f(t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$. On précisera le comportement local au voisinage de $f(0)$.
4. Etudier la courbe au voisinage du point singulier de paramètre 0.

Exercice 13 ☆☆ Néphroïde

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos t - \cos(3t) \\ y(t) = 3 \sin t - \sin(3t) \end{cases}$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆

Soient $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

On considère l'application

$$\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2.$$

Justifier que δ admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de δ en (a, b) , à l'aide de a, b, C_1, C_2, Y_0 et le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ usuel associé à la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pourra réécrire $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$, en notant C_1 et C_2 les colonnes de A .

Exercice 15 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives, I un intervalle de \mathbb{R} , et $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.

Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I .

Exercice 16 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(A - tI_n)$

1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir $\varphi(t)$, $\det A$ et $\text{tr } A$.

2) Justifier que l'application φ est continue sur \mathbb{R} .

3) Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 17 ☆☆☆ Mines-Ponts

a) Etudier la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$

b) Donner une équation de la tangente et de la normale en $M(t)$.

c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

Exercice 18 ☆☆ Pour les amoureux des courbes

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

Exercice 19 ☆☆☆☆ *Centrale avec Python*

On pose le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et $f(t) = \frac{\cos(t)}{\cos^3(\frac{t}{3})} \vec{i} + \frac{\sin(t)}{\cos^3(\frac{t}{3})} \vec{j}$

- 1) a) Donner le domaine de définition D_f de f
- b) On note C l'arc paramétré (D_f, f) . Montrer que f parcourt C sur un intervalle contenant 0
- 2) Tracer C à l'aide de l'outil informatique. Expliquer la symétrie observée
- 3) Soit D une droite passant par O
 - a) À l'aide de la courbe tracée conjecturer le nombre de points d'intersection entre D et C . (Distinguer deux cas)
 - b) Montrer la conjecture par le calcul
- 4) On pose D_0 la droite d'équation $y = 0$
 - a) Donner les équations des tangentes à C aux points d'intersection entre C et D_0 .
 - b) Tracer ces tangentes sur l'outil informatique. Faire une conjecture sur le triangle formé par ces tangentes.
 - c) Démontrer cette conjecture.
- 5) D désigne encore une droite passant par O
 - a) Généraliser la conjecture précédente (les tangentes aux points d'intersection de D et C forment un triangle équilatéral)

Exercice 20 ☆☆☆ *Folium de Descartes*

Soit (\mathcal{F}) la courbe de représentation paramétrique

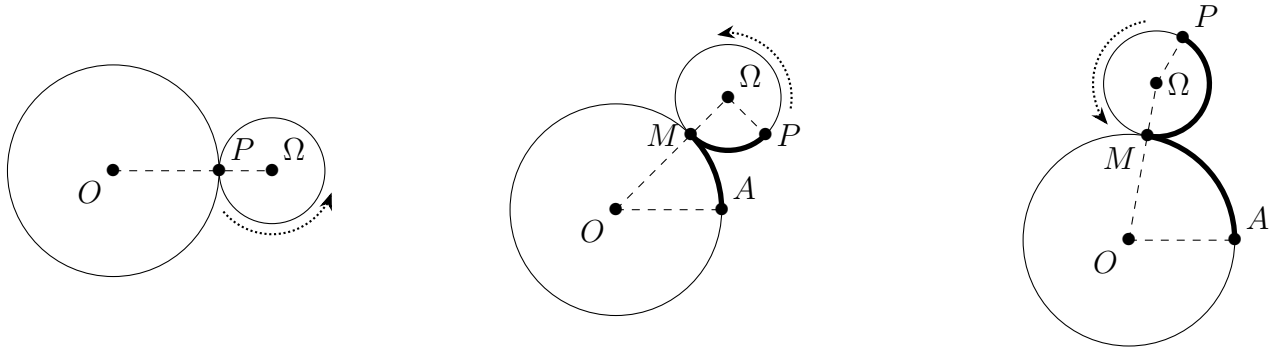
$$M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{3t}{t^3 + 1}, \frac{3t^2}{t^3 + 1} \right)$$

1. Préciser le domaine de définition D des fonctions x et y .
2. Si $t \in D - \{0\}$, comparer $M\left(\frac{1}{t}\right)$ et $M(t)$. En déduire qu'on peut restreindre l'étude à $t \in]-1; 1]$.
3. Etudier les variations des fonctions x et y sur $] -1; 1]$, en précisant les valeurs ou limites aux bornes.
4. Déterminer la limite α de $\frac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers (-1) .
5. Etudier le comportement de $y(t) - \alpha x(t)$ quand t tend vers (-1) . Qu'en déduit-on pour la courbe (\mathcal{F}) ?
6. Déterminer le point $A = \lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} M(t)$
7. Ecrire $\overrightarrow{AM(t)}$ sous la forme $\overrightarrow{AM(t)} = \varphi(t) \cdot \overrightarrow{F(t)}$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \vec{L} \neq \vec{0}$
8. En déduire la tangente à la courbe au point-limite A .
9. Tracer la courbe (\mathcal{F}) , en plaçant les points et tangentes remarquables.

V. Problème de concours

ATS 2019

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon $1/2$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1 . La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarque que la longueur de l'arc \widehat{AM} est égale à la longueur de l'arc \widehat{MP} .



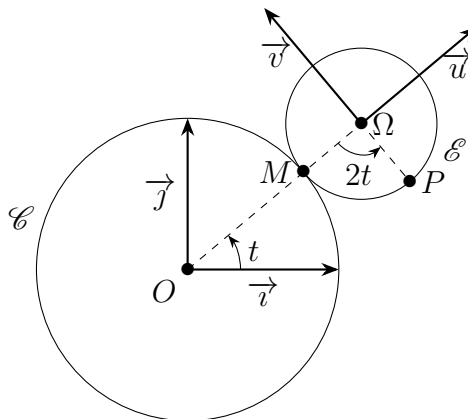
Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

- Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P})$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM},)$ satisfont l'égalité $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM},)$.

Afin d'étudier la trajectoire du point P , on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 . Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ appartenant au cercle \mathcal{C} . On note \mathcal{E} le cercle de rayon $1/2$ extérieurement tangent au cercle \mathcal{C} en M . Le centre du cercle \mathcal{E} est noté Ω . D'après la question 1, le point P est le point du cercle \mathcal{E} tel que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega P}) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathcal{P} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \end{cases}$$



- Donner les coordonnées du point Ω dans le repère \mathcal{R} .
- Démontrer que le repère \mathcal{P} est orthonormal.
- Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère \mathcal{P} sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2} \right)$$

5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère \mathcal{R} et (X, Y) ses coordonnées dans le repère \mathcal{P} . Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère \mathcal{R} sont

$$(3 \cos t - 2(\cos t)^3, 2(\sin t)^3).$$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée \mathcal{N} et décrite par le point P . On considère donc les fonctions x et y définies sur \mathbb{R} par

$$x(t) = 3 \cos t - 2(\cos t)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2(\sin t)^3$$

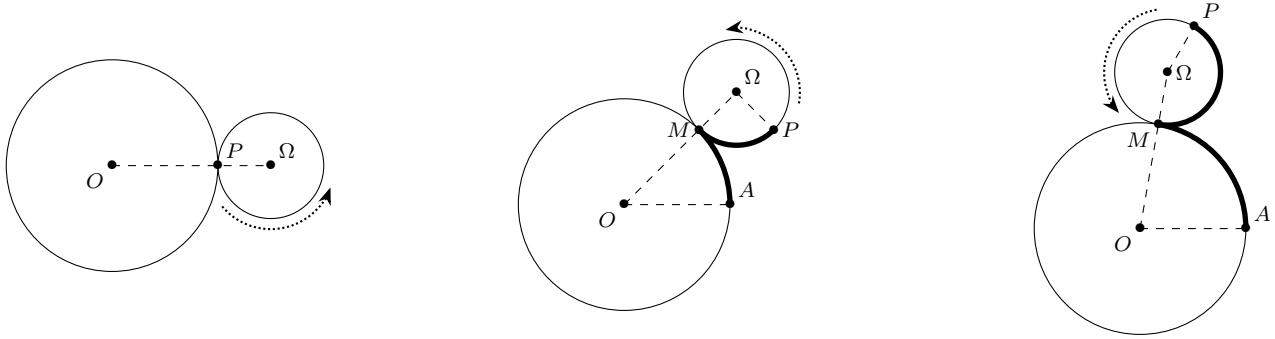
de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(t) = (x(t), y(t))$.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.
2. Montrer que pour tout réel t , les points $P(t + \pi)$ et $P(-t)$ se déduisent du point $P(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe \mathcal{N} .
3. Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I . On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
4. Donner une représentation graphique de la courbe \mathcal{N} en y faisant apparaître pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $P(0)$ est horizontale.

Notes

²⁰ correction :

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon $1/2$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1 . La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarque que la longueur de l'arc \widehat{AM} est égale à la longueur de l'arc \widehat{MP} .



Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

1. Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P})$ et (\vec{OA}, \vec{OM}) satisfont l'égalité $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P}) = 2(\vec{OA}, \vec{OM})$.

$$\widehat{AM} = \widehat{MP} \text{ et } OA = 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \Omega M \text{ donc}$$

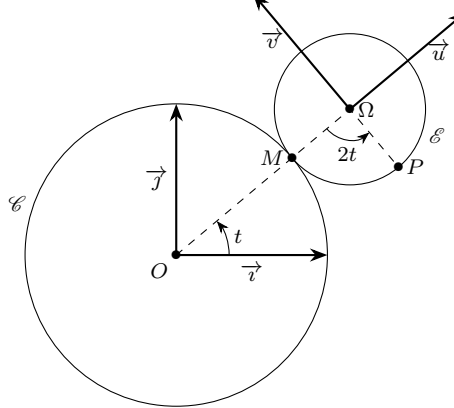
$$\widehat{AM} = (\vec{OA}, \vec{OM}) \times OA = (\vec{OA}, \vec{OM}) \times 2 \times \Omega M = (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P}) \times \Omega M$$

donc

$$(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P}) = 2(\vec{OA}, \vec{OM}).$$

Afin d'étudier la trajectoire du point P , on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 . Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$ appartenant au cercle \mathcal{C} . On note \mathcal{E} le cercle de rayon $1/2$ extérieurement tangent au cercle \mathcal{C} en M . Le centre du cercle \mathcal{E} est noté Ω . D'après la question 1, le point P est le point du cercle \mathcal{E} tel que $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega P}) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathcal{P} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \end{cases}$$



2. Donner les coordonnées du point Ω dans le repère \mathcal{R} .

\mathcal{C} et \mathcal{E} sont tangents au point M donc O, M et Ω sont alignés dans cet ordre. On en déduit que $\|\vec{O\Omega}\| = \|\vec{OM}\| + \|\vec{M\Omega}\| = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

D'autre part, $(\vec{i}, \vec{O\Omega}) = (\vec{i}, \vec{OM}) = t$ et $(\vec{j}, \vec{O\Omega}) = (\vec{j}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{O\Omega}) = -\frac{\pi}{2} + t$ où

$$\begin{cases} \vec{O\Omega} \cdot \vec{i} = \|\vec{O\Omega}\| \times \|\vec{i}\| \times \cos((\vec{i}, \vec{O\Omega})) = \frac{3}{2} \cos(t) \\ \vec{O\Omega} \cdot \vec{j} = \|\vec{O\Omega}\| \times \|\vec{j}\| \times \cos((\vec{j}, \vec{O\Omega})) = \frac{3}{2} \cos(t) = \frac{3}{2} \sin(t) \end{cases}$$

Finalement $\Omega = \left(\frac{3}{2} \cos(t), \frac{3}{2} \sin(t)\right)_{\mathcal{R}}$.

3. Démontrer que le repère \mathcal{P} est orthonormal.

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \cos(t) \times (-\sin(t)) + (-\sin(t)) \times \cos(t) = 0 \end{cases}$$

Le repère \mathcal{P} est orthonormal.

4. Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère \mathcal{P} sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right)$$

Commençons par remarquer que $\vec{\Omega O} = -\frac{3}{2} \cos(t)\vec{i} - \frac{3}{2} \sin(t)\vec{j} = -\frac{3}{2}\vec{u}$. Comme O, M et Ω sont alignés dans cet ordre, $(\vec{\Omega M}, \vec{u}) = (\vec{\Omega O}, \vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$ et enfin $(\vec{\Omega M}, \vec{v}) = (\vec{\Omega M}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

$$\begin{cases} \vec{\Omega P} \cdot \vec{u} = \|\vec{\Omega P}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos((\vec{\Omega P}, \vec{u})) = \frac{1}{2} \cos((\vec{\Omega P}, \vec{\Omega M}) + (\vec{\Omega M}, \vec{u})) \\ \vec{\Omega P} \cdot \vec{v} = \|\vec{\Omega P}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{\Omega P}, \vec{v})) = \frac{1}{2} \cos((\vec{\Omega P}, \vec{\Omega M}) + (\vec{\Omega M}, \vec{v})) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \vec{\Omega P} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \cos(-2t + \pi) = -\frac{\cos(2t)}{2} \\ \vec{\Omega P} \cdot \vec{v} = \|\vec{\Omega P}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{\Omega P}, \vec{v})) = \frac{1}{2} \cos\left(-2t + \frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{\sin(2t)}{2} \end{cases}$$

Finalement $P = \left(\frac{-\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right)_{\mathcal{P}}$.

5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère \mathcal{R} et (X, Y) ses coordonnées dans le repère \mathcal{P} . Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Nous avons $N = (x, y)_{\mathcal{R}} = (X, Y)_{\mathcal{P}}$ donc $\vec{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{ON} = X\vec{u} + Y\vec{v}$.

Puisque $\vec{ON} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega N}$ nous avons

$$\begin{cases} \vec{ON} \cdot \vec{i} = x = \left(\frac{3}{2} \cos(t)\vec{i} + \frac{3}{2} \sin(t)\vec{j} + X(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}) + Y(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j})\right) \cdot \vec{i} \\ \vec{ON} \cdot \vec{j} = y = \left(\frac{3}{2} \cos(t)\vec{i} + \frac{3}{2} \sin(t)\vec{j} + X(\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}) + Y(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j})\right) \cdot \vec{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos(t) + X \cos(t) - Y \sin(t) \\ y = \frac{3}{2} \sin(t) + X \sin(t) + Y \cos(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère \mathcal{R} sont

$$(3 \cos(t) - 2(\cos(t))^3, 2(\sin(t))^3).$$

On applique le résultat précédent, vrai pour tout point du plan, au point P en utilisant les relations trigonométriques $\cos(2t) = 2(\cos(t))^2 - 1$, $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\cos(2t)}{2} \\ -\frac{\sin(2t)}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos(t) - \frac{\cos(t)\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(t)\sin(2t)}{2} \\ \frac{3}{2} \sin(t) - \frac{\sin(t)\cos(2t)}{2} - \frac{\cos(t)\sin(2t)}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos(t) - \frac{2(\cos(t))^3 - \cos(t)}{2} + \frac{(\sin(t))^2 \cos(t)}{2} \\ \frac{3}{2} \sin(t) - \frac{\sin(t)(1 - 2(\sin(t))^2)}{2} - \frac{2\sin(t)(1 - (\sin(t))^2)}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos(t) - 2 \cos(t)^3 \\ 2(\sin(t))^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement $P = \left(\frac{3 \cos(t) - 2 \cos(t)^3}{2(\sin(t))^3}\right)_{\mathcal{R}}$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée \mathcal{N} et décrite par le point P . On considère donc les fonctions x et y définies sur \mathbb{R} par

$$x(t) = 3 \cos(t) - 2 (\cos(t))^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2 (\sin(t))^3$$

de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(t) = (x(t), y(t))$.

1. **Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.**

Les fonctions x et y sont 2π -périodiques car les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques :

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t + 2\pi) = 3 \cos(t + 2\pi) - 2 (\cos(t + 2\pi))^3 = 3 \cos(t) - 2 \cos(t)^3 = x(t) \\ y(t + 2\pi) = 2 (\sin(t + 2\pi))^3 = 2 (\sin(t))^3 = y(t) \end{cases}$$

2. **Montrer que pour tout réel t , les points $P(t + \pi)$ et $P(-t)$ se déduisent du point $P(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe \mathcal{N} .**

Les points $P(t + \pi)$ et $P(t)$ sont symétriques par rapport au point $(0, 0)$ car

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t + \pi) = 3 \cos(t + \pi) - 2 (\cos(t + \pi))^3 = -3 \cos(t) + 2 \cos(t)^3 = -x(t) \\ y(t + \pi) = 2 (\sin(t + \pi))^3 = -2 (\sin(t))^3 = -y(t) \end{cases}$$

Les points $P(-t)$ et $P(t)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = 0$ car

$$\begin{cases} x(-t) = 3 \cos(-t) - 2 (\cos(-t))^3 = 3 \cos(t) - 2 \cos(t)^3 = x(t) \\ y(-t) = 2 (\sin(-t))^3 = -2 (\sin(t))^3 = -y(t) \end{cases}$$

On peut restreindre l'étude à l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car

- (a) la symétrie d'axe $y = 0$ permet de prolonger, sans calcul supplémentaire, l'étude sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
 - (b) puis la symétrie par rapport au point $(0, 0)$ permet de prolonger, sans calcul supplémentaire, l'étude sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;
 - (c) enfin la 2π -périodicité permet de prolonger, sans calcul supplémentaire, l'étude sur \mathbb{R} .
3. **Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I . On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Les fonctions x et y sont dérivables sur I et**

$$\begin{cases} x'(t) = -3 \sin(t) + 6 \sin(t) (\cos(t))^2 \\ y'(t) = 6 \cos(t) (\sin(t))^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 3 \sin(t) \cos(2t) \\ y'(t) = 6 \cos(t) (\sin(t))^2 \end{cases}$$

Sur l'intervalle I , nous avons

$$\begin{cases} x'(t) = 0 & \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \text{ ou } \cos(2t) = 0 & \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}\right\} \\ y'(t) = 0 & \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \text{ ou } \sin(t) = 0 & \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$$

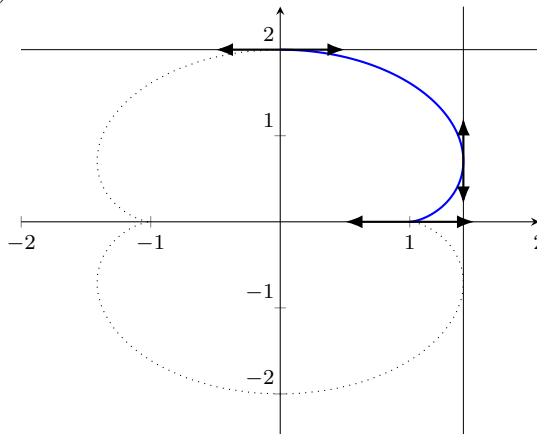
puis, nous pouvons étudier le signe de x' et y' .

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	+	0	+	1
$2t$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos 2t$	0	+	0	-	-1
signe de $x'(t)$	0	+	0	-	-3
$\cos t$	1	+		+	0
$(\sin t)^2$	0	+		+	1
signe de $y'(t)$	0	+	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	+	0

Nous obtenons le tableau de variation :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
signe de $x'(t)$	0	+	0	-	-3
variations de x	1	\nearrow	$\sqrt{2}$	\searrow	0
signe de $y'(t)$	0	+	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	+	0
variations de y	0	\nearrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	\nearrow	2

4. Donner une représentation graphique de la courbe \mathcal{N} en y faisant apparaître pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ les points $P(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $P(0)$ est horizontale.



Représentation graphique de la courbe \mathcal{N} (trait plein : $t \in I$; pointillé : $t \in [0; 2\pi] \setminus I$).
