Méthodes à retenir :

- Pour étudier un arc paramétré par $t \mapsto (x(t), y(t))$:
  1. on détermine son ensemble de définition
  2. on recherche d'éventuelles périodocités
  3. on recherche d'éventuelles symétries en cas de parité ou imparité de x et y
  4. on établit le tableaux de variations simultanées dont les colonnes sont $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$.
  5. on repère des éventuelles asymptotes verticales ou tangentes horizontales
  6. On trace

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

Trouver une équation cartésienne de l'ensemble des points paramétrés par : $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & t^3 \end{array}\right.$

Exercice 2 ✰

Paramétrer la droite du plan passant par le point $A(2,-1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(-1,4)$

Exercice 3 ✰

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$ au point $M = (1/\sqrt{2}; 1/2)$.

Exercice 4 ✰

Soit U, V deux applications de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On note $< \ | \ >$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $\varphi : t \longmapsto < U(t)|V(t) >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ au point $A = (1; 0; 0)$.

II. A savoir rédiger

Exercice 6 ✰ ✰

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(2t) \\ y(t) & = & \cos(t) \end{array}\right.$$

Exercice 7 ✰ ✰ *Lissajous*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \sin(2t) \\ y(t) & = & \sin(3t) \end{array}\right.$$

Exercice 8 ✰✰ *mouvement circulaire*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. Proposer une interprétation cinématique.

III. Exercices

Exercice 9 ☆☆

Que réprésentent les courbes planes paramétrées :

$C_1 : \begin{cases} x(t) &= -1+2t \\ y(t) &= 2t \end{cases}$, $C_2 : \begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) \\ y(t) &= 3\sin t \end{cases}$, $C_3 : \begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) \\ y(t) &= 3\cos t \end{cases}$?

Exercice 10 ☆☆ *Pour les amoureux des courbes*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin^3 t \\ y(t) &= \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

Exercice 11 ☆☆ *Cycloïde*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Pour quelles valeurs de t la coordonnée selon $(0y)$ de f' s'annule-t-elle ?
3. Représenter la trajectoire d'un mobile dont la position à l'instant t est $f(t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$. On précisera le comportement local au voisinage de $f(0)$.
4. Etudier la courbe au voisinage du point singulier de paramètre 0.

Exercice 12 ☆☆ *Néphroïde*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= 3\cos t - \cos(3t) \\ y(t) &= 3\sin t - \sin(3t) \end{cases}$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 13 ☆☆☆

Soient $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

On considère l'application

$\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2$.

Justifier que δ est admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de δ en (a,b), à l'aide de a, b , C_1, C_2, Y_0 et le produit scalaire $< \ | \ >$ usuel associé à la norme euclidienne $\| \ \|_2$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pourra réécrire $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$, en notant C_1 et C_2 les colonnes de A.

Exercice 14 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.

Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I.

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(A - tI_n)$

1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir $\varphi(t)$, $\det A$ et $\operatorname{tr} A$.

2) Justifier que l'application φ est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 16 ☆☆ ☆ *Mines-Ponts*

a) Etudier la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$

b) Donner une équation de la tangente et de la normale en $M(t)$.

c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

Exercice 17 ☆☆ *Pour les amoureux des courbes*

Etudier la courbe paramétrée par le paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin^3 t \\ y(t) &= \cos t - \cos^4 t \end{cases}$$

Exercice 18 ☆☆☆ *Folium de Descartes*

Soit $(\mathcal{F})$ la courbe de représentation paramétrique
$M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\dfrac{3t}{t^3+1}, \dfrac{3t^2}{t^3+1}\right)$

1. Préciser le domaine de définition D des fonctions x et y.
2. Si $t \in D - \{0\}$, comparer $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ et $M(t)$. En déduire qu'on peut restreindre l'étude à $t \in]-1;1]$.
3. Etudier les variations des fonctions x et y sur $]-1;1]$, en précisant les valeurs ou limites aux bornes.
4. Déterminer la limite α de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand t tend vers (-1) .
5. Etudier le comportement de $y(t)-\alpha x(t)$ quand t tend vers (-1). Qu'en déduit-on pour la courbe $(\mathcal{F})$?
6. Déterminer le point $A = \lim\limits_{t\to+\infty} M(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} M(t)$
7. Ecrire $\overrightarrow{AM(t)}$ sous la forme $\overrightarrow{AM(t)} = \varphi(t).\overrightarrow{F(t)}$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \overrightarrow{L} \neq \overrightarrow{0}$
8. En déduire la tangente à la courbe au point-limite A.
9. Tracer la courbe $(\mathcal{F})$, en plaçant les points et tangentes remarquables.

V. Trajectoires d'un système différentiel

Exercice 19 *Trajectoires d'un système différentiel, cas diagonal réel*

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et semblable (sur $\mathbb{R}$) à la matrice diagonale (réelle) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ fixée.

Soient x, y les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel :

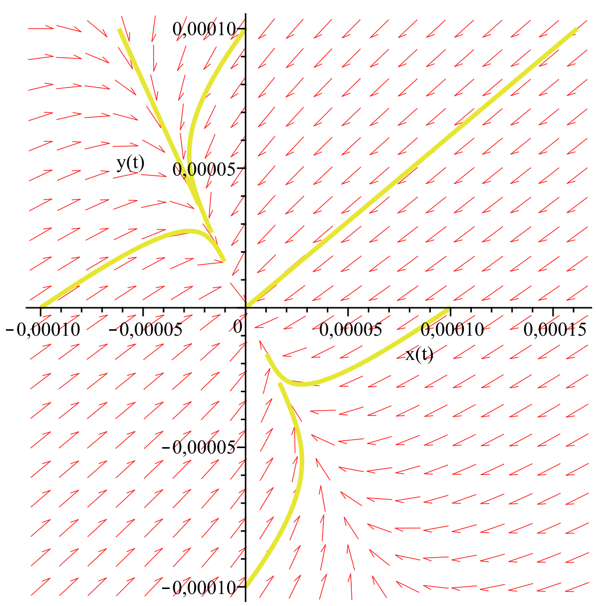
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

Donc il existe une base (V_1, V_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 + e^{\lambda_2 t} V_2$

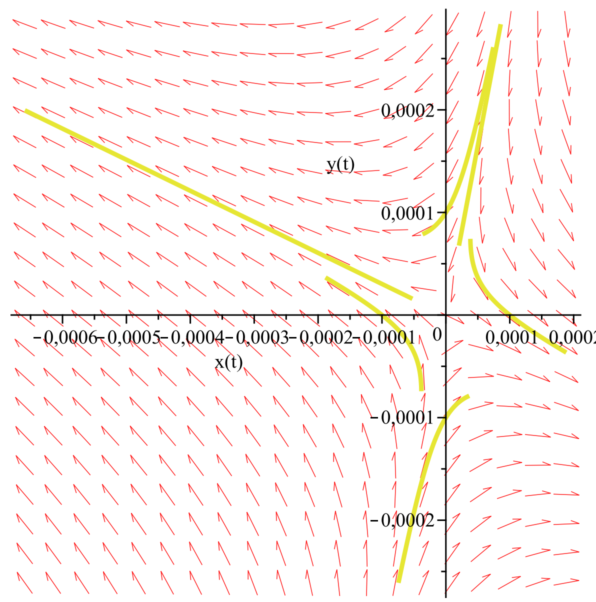
Reconnaître dans chaque cas les trajectoires obtenues pour diverses conditions initiales $M(0) = (x(0), y(0))$

Cas : $\boxed{\text{i) } \lambda_2 > \lambda_1 > 0}$ $\boxed{\text{ii) } \lambda_2 < \lambda_1 < 0}$ $\boxed{\text{iii) } \lambda_2 < 0 < \lambda_1}$ $\boxed{\text{iv) } \lambda_2 = \lambda_1 > 0}$

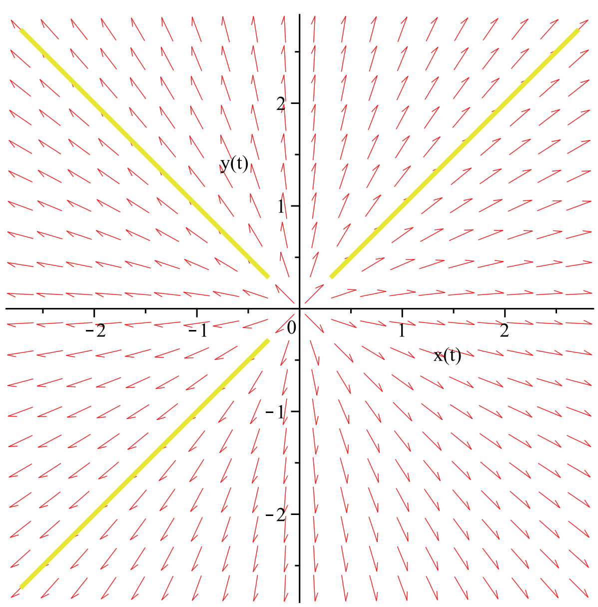
1.



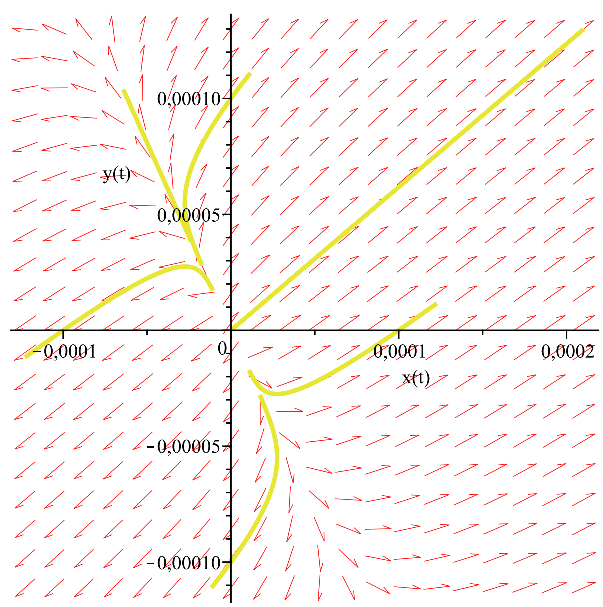
3.



2.



4.



Exercice 20 *Trajectoires d'un système différentiel, cas complexe*

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ fixée possédant deux valeurs propres distinctes non réelles λ_1 et λ_2. Soit $v_1 = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}$ un vecteur propre complexe non réel de A associé à la valeur propre complexe non réelle λ_1, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fixés.

On note $u = \mathrm{Re}(\lambda_1)$ et $v = \mathrm{Im}(\lambda_1)$

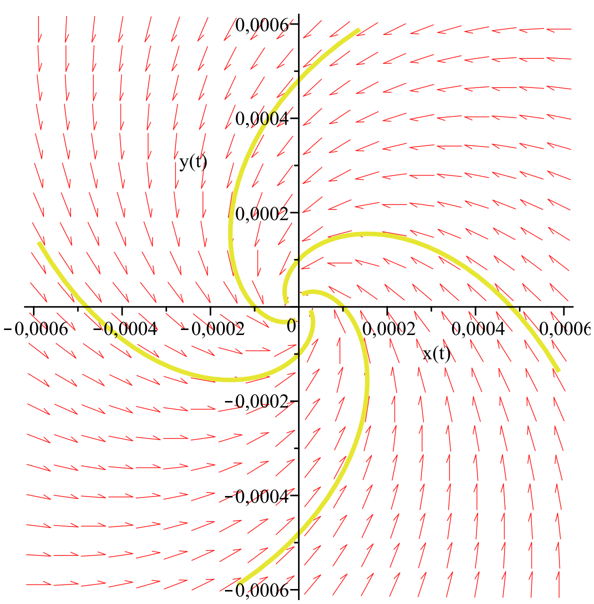
On sait que les solutions complexes sont les $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mu \mathbf{e}^{ut}\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \mu' \mathbf{e}^{ut}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} \overline{p} \\ \overline{q} \end{pmatrix}$, avec $\mu, \mu' \in \mathbb{C}$.

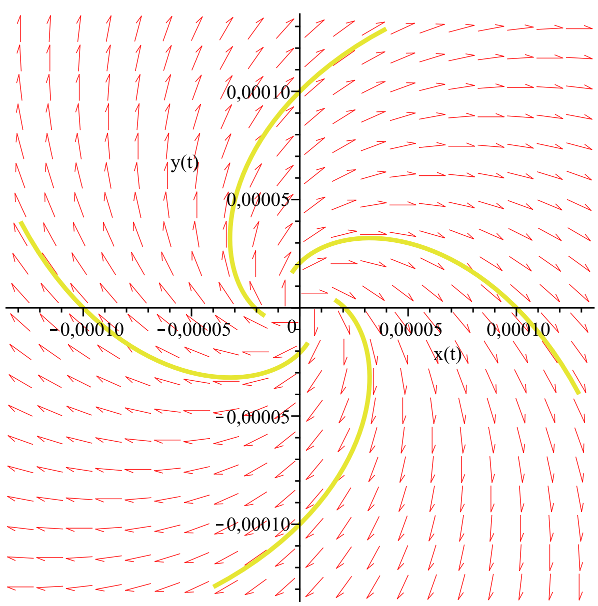
On sait que les solutions réelles sont les $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\mathbf{e}^{ut}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) - b\mathbf{e}^{ut}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Donc il existe une base (V_1, V_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{ut}\cos(vt)V_1 + e^{ut}\sin(vt)V_2$

Reconnaître dans chaque cas les trajectoires obtenues pour diverses conditions initiales $M(0) = (x(0), y(0))$

Cas : $\boxed{\text{i) } (u,v) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*}$ $\boxed{\text{ii) } u = 0 \text{ et } v \in \mathbb{R}_*}$ $\boxed{\text{iii) } (u,v) \in \mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}_*}$

1.


2.


3.