Méthodes à retenir :

- Il est utile de savoir représenter les marginales dans un tableau pour un couple de variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

On considère le couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$, dont la loi est donnée par :
$\mathbf{P}((0,0)) = 1/8$, $\mathbf{P}((0,1)) = 1/4$,
$\mathbf{P}((1,0)) = 3/8$, $\mathbf{P}((1,1)) = 1/4$.

1. Déterminer les lois marginales $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$, à l'aide d'un tableau.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ✰

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$ fixé.

Déterminer la loi de $2X$, son espérance et sa variance.

Exercice 3 ✰✰

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli $b(1/2)$. Les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 ✰

On note S la somme de deux dés équilibrés.

1. Déterminer la loi de S.
2. Déterminer l'espérance de S.
3. Déterminer la variance de S.

II. A savoir rédiger

Exercice 5 ✰✰

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice 6 ✰✰

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

III. Exercices

Exercice 7 ✰✰✰ *Pièce*

On lance une pièce équilibrée plusieurs fois de suite. X est le rang pour lequel on obtient pour la 2ème fois « Pile ». On tire alors une boule dans une urne contenant $X-1$ boules numérotées de 1 à $X-1$ et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que X admet une variance et une espérance.
2. Déterminer la loi de Y à partir de la loi de Y sachant $\{X = k\}$.
3. Montrer que Y admet une variance et une espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 8 ☆☆

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 ☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète, valeurs dans $\mathbb{R}$.

Supposons que $\mathbb{E}[X^2]$ existe, a-t-on $\mathbb{E}[X]$ existe ?

Exercice 10 ☆☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbf{P}\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{2^{j+1}\ k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 11 ☆☆ *Bluff et théorie des jeux*

On considère le jeu suivant :

- le joueur A lance une pièce en espérant obtenir Pile. Il garde pour lui le résultat du lancé. Il peut alors soit abandonner en déclarant avoir obtenu Face et payer un euro, soit déclarer avoir obtenu Pile (mais cela peut être du bluff).

- Si A déclare "Pile"le joueur B a alors deux options :

- ou bien il ne conteste pas l'affirmation, et perd 1 euro.
- ou bien il conteste le résultat affirmé. S'il a raison il gagne 2 euros. S'il a tort, il verse 2 euros.

1. *Etude du jeu sans bluff :*

   Le joueur A s'interdit ici le bluff.

   On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur A. Déterminer la loi de X. Le joueur B ne contestera jamais l'affirmation de A.

   En déduire l'espérance de X.

2. *Etude du jeu avec bluff :* En cas d'échec lors du lancer, le joueur A s'autorise à déclarer "Pile" au lieu du résultat obtenu avec une probabilité $p \in [0, 1]$.

   En cas de déclaration "Pile" par le joueur A à l'issue du lancer, le joueur B s'autorise à contester l'affimation de A avec une probabilité $q \in [0, 1]$.

   On note Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur A. Déterminer la loi de Y.

   En déduire que l'espérance de Y est $\mathbb{E}[Y] = p + q\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}p\right)$

3. Quelle est alors la valeur de p optimale pour maximiser le gain du joueur A ?

   Commentaire ?

4. En réécrivant $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}q + p\left(1 - \frac{3}{2}q\right)$, montrer que B a une stratégie optimale pour limiter ses pertes.

Notes

[1] correction :

$\mathbf{P}_X(0) = 1/8 + 2/8 = 3/8$, $\mathbf{P}_X(1) = 3/8 + 2/8 = 5/8$, $\mathbf{P}_Y(0) = 1/8 + 3/8 = 1/2$, $\mathbf{P}_Y(1) = 2/8 + 2/8 = 1/2$

Non, X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbf{P}((0,0)) = 1/8 \neq 3/8 * 1/2 = 3/16$

[6] correction : En distinguant les boules, il y a $\binom{n}{2n}$ tirages possibles et, pour $0 \leq k \leq n$, exactement $\binom{k}{n}\binom{n-k}{n}$ tirages conduisant à l'obtention de k boules rouges. On en déduit $P(X=k) = \binom{k}{n}\binom{n-k}{n}/\binom{n}{2n}$

L'espérance de X est $\mathrm{E}(X) = 1/\binom{n}{2n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{k}{n}\binom{n-k}{n}$

avec $\sum_{k=1}^{n} k\binom{k}{n}\binom{n-k}{n} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{k-1}{n-1}\binom{n-k}{n}$

On a $\sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{n-1}\binom{n-k}{n} = \binom{n-1}{2n-1}$

en considérant le coefficient de X^{n-1} dans le développement de $(1+X)^{n-1}(1+X)^n n = (1+X)^{2n-1}$

et donc $\mathrm{E}(X) = 1/\binom{n}{2n} n\binom{n-1}{2n-1} = n/2$

On calcule la variance $\mathrm{V}(X)$ par la relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ en commençant par calculer $\mathrm{E}(X(X-1))$. $\mathrm{E}(X(X-1)) = n(n-1)/\binom{n}{2n}\sum_{k=2}^{n}\binom{k-2}{n-2}\binom{n-k}{n}$

et en considérant le coefficient de X^{n-2} dans le développement de $(1+X)^{n-2}(1+X)^n n = (1+X)^{2n-2}$

on obtient $\mathrm{E}(X(X-1)) = n(n-1)/\binom{n}{2n}\binom{n-2}{2n-2} = \dfrac{n(n-1)^2}{2(2n-1)}$

puis $\mathrm{E}(X^2) = n^3/(2(2n-1))$

et enfin $\mathrm{V}(X) = \dfrac{n^2}{4(2n-1)}$

[7] correction :

1. Pour $k \geq 2$: $P[X=k] = (k-1)2^{-k}$: choix du pile parmi les $(k-1)$ premiers lancers.
   $E[X] = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \dfrac{1}{k}\dfrac{2}{(1-1/2)^3} = 4$
   La série $\sum_{k\geq 2} k^2(k-1)2^{-k}$ CV et $E[X^2] = \sum_{k=2}^{+\infty} k^2(k-1)2^{-k} = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)2^{-k} + 2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \dfrac{1}{2^3}\dfrac{3!}{(1-1/2)^4} + 2\dfrac{1}{2^2}\dfrac{2!}{(1-1/2)^3} = 20$
   $V(X) = 20 - 4^2 = 4$.
2. sachant $\{X=k\}$, Y prend les valeurs $1\dots,k-1$, donc$Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Pour $n \geq 1$, on a $P[Y=n] = \sum_{k=2}^{+\infty} P[X=k] \times P_{X=k}[Y=n] = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)2^{-k} \times \dfrac{1}{k-1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} \times 11 - 1/2 = (1-p)^{n-1}p$ pour $p = 1/2$
   Donc (loi géométrique) $E[Y] = 2$, $V[Y] = 2$
3. Non $P[(X=2)\cap(Y=3)] = 0$: pas d'indépendance !
4. $E[XY] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} knP[(X,Y)=(k,n)] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1} kn(k-1)\dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{k}{2^k}\dfrac{k(k-1)}{2} = \dfrac{1}{2}E[X^2] = 10$
   $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 10 - 4 * 2 = 2$
   $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[9] correction : Oii, C.S. $\sum x_i p_i \leq \left(\sum \sqrt{p_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum x_i^2 \sqrt{p_i}^2\right)^{1/2}$