

Méthodes à retenir :

- Les solutions d'une équation de la forme  $y'' = ay' + by$  sont données à l'aide des racines  $r_1$  et  $r_2$  de l'équation caractéristique  $r^2 - ar - b = 0$ .  
Si  $r_1 = r_2$ ,  $y$  est de la forme  $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta t e^{r_1 t}$   
Si  $r_1 \neq r_2$ ,  $y$  est de la forme  $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  à déterminer en fonction des conditions initiales  $y(t_0)$  et  $y'(t_0)$ .  
Pour trouver les solutions réelles lorsque  $r_1 = \bar{r}_2 = u + i\omega$ , avec  $u, \omega \in \mathbb{R}$ , il suffit de prendre les combinaisons linéaires des solutions complexes, de la forme  $t \mapsto Ae^{ut} \cos(\omega t) + Be^{ut} \sin(\omega t)$ , avec  $A, B \in \mathbb{R}$
- Etant données plusieurs équations différentielles, portant sur des fonctions  $x_1, \dots, x_n$ , il est indispensable de savoir les réécrire sous la forme  $X' = AX$ , avec une matrice  $A$  que l'on sait expliciter.
- Lorsque  $A$  est **diagonalisable**, semblable à la matrice diagonale  $D$ , avec  $D = P^{-1}AP$ , pour  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , on a :  $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$ , ce qui permet de se ramener à un système diagonal  $Z' = DZ$

## I. Révisions de PCSI

**Exercice 1** ☆

Résoudre, en fonction de  $a \in \mathbb{R}^+$  :  $y'' - ay = 0$  (H).

**Exercice 2** ☆

Résoudre, en fonction de  $a \in \mathbb{R}^+$  :  $y'' + ay = 0$  (H).

**Exercice 3** ☆

Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$(H) \quad y'' + 3y' - 4y = 0$$

**Exercice 4** ☆

résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre :  
(E)  $2y' - y = e^t$

**Exercice 5** ☆

Résoudre l'équation différentielle linéaire du 2d ordre :  
(H)  $y'' + 2y' + y = 0$   
Soit (E)  $y'' + 2y' + y = 4e^t$   
résoudre (E).

## II. Applications directes du cours

**Exercice 6** ☆ ☆

On souhaite résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = -y & (1) \\ y' = x & (2) \end{cases}$$

1. On pose  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

Expliciter une matrice  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $X' = AX$

2.  $A$  est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. en déduire les solutions réelles de (S).

**Exercice 7** ☆ ☆

On souhaite résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = 3x - y & (1) \\ y' = -x + 3y & (2) \end{cases}$$

1. On pose  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

Expliciter une matrice  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $X' = AX$

2.  $A$  est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. en déduire les solutions réelles de (S).

### III. A savoir rédiger

#### Exercice 8 ☆ ☆

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

- 1) Montrer que  $A$  est diagonalisable.
- 2) Soient  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ , et  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice  $P$  inversible telle que  $D = P^{-1}AP$

3) Résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

#### Exercice 9 ☆ ☆

Résoudre le système différentiel d'inconnue

$(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$  :

$$(S) : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases}$$

### IV. Exercices

#### Exercice 10

1) Donner l'expression de la dérivée de

$$f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

2) Résoudre l'équation différentielle suivante sur

$$]0, \infty[ : x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$$

#### Exercice 11

On considère sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(E) : y'' + \operatorname{sh}(x)y' + y = 0.$$

1. Montrer que si  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $z : x \mapsto y(-x)$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer qu'il existe une unique solution paire valant 1 en 0 sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 12 ☆ ☆ ☆

1. Résoudre le système différentiel d'inconnue

$(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$  :

$$(S) : \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$$

2. En déduire les solution du système différentiel

$(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$  :

$$(S') : \begin{cases} x' = -x + 2y - e^t \\ y' = -3x + 4y - e^t \end{cases}$$

#### Exercice 13 ☆ ☆

Soient  $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

On admet que  $P$  est inversible d'inverse  $P^{-1} =$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Et on pose } A = PDP^{-1}.$$

1. Résoudre le système différentiel  $Z' = DZ$ , avec  $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dérivable.

2. Résoudre le système différentiel  $X' = AX$ , avec  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dérivable.

3. Résoudre le système différentiel  $X' = AX$ , avec la condition initiale  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 14** ☆ ☆

1) Justifier que le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = tx + (1-t^2)y & (1) \\ y' = x - ty & (2) \end{cases}$$

admet une unique solution  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  satisfaisant la

condition initiale :  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (CI)

2) Montrer que si  $X$  est une solution de (S), alors  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^\infty$ .

3) En dérivant (2), montrer que  $y$  est solution de l'équation différentielle :  $y'' = 0$  (E)

4) En déduire l'ensemble des solutions de (S) et (CI).

**Exercice 15** CCP PC

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation (E) :  $xy'' + xy' - y = 0$ .

1. Déterminer un réel  $\alpha$  tel que  $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$  soit solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$  converge et que  $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2} dt$  diverge.

3. Soit  $G : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ . Étudier les variations de  $G$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

4. Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $s : x \mapsto xf(x)$ . Montrer que  $s$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ , si et seulement si  $f'$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E'), que l'on précisera.

5. Résoudre (E') sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

6. Exprimer les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  à l'aide de la fonction  $G$ .

## V. Pour aller plus loin

**Exercice 16** ☆ ☆

Résoudre :

$$y^{(3)} - y = 0$$

**Exercice 17** ☆ ☆

On considère l'équation différentielle :

$$x^2y'' - 3xy' + 4x = x^2 \quad (E)$$

et (H) l'équation homogène associée.

- Trouver les solutions polynomiales de (H).
- Trouver toutes les solutions de (H) sur  $]0, +\infty[$ .
- Trouver toutes les solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 18** ☆ ☆

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable. On considère une fonction  $X$  vérifiant  $X'(t) = AX(t)$

1. Montrer que si  $V$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$  et si  $X(0) = V$  alors  $\forall t, X(t) = e^{\lambda t}V$ .

2. De façon générale, donner l'expression de  $X(t)$  en fonction de  $X(0)$ .

**Exercice 19** ☆ ☆

Soit (E)  $ty' + y = 0$

1. Montrer que l'ensemble  $S_+$  des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  est

$$S_+ = \left\{ ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda \frac{1}{t}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Montrer que l'ensemble  $S_-$  des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}_*^-$  est

$$S_- = \left\{ ]-\infty, 0[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \mu \frac{1}{t}; \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. En déduire que l'ensemble des solutions (dérivable) sur  $\mathbb{R}$  est réduit à  $\{t \mapsto 0\}$ .

**Exercice 20** ☆ ☆

On considère le champ de vecteurs défini par

$$(C) \begin{cases} x' = y & (1) \\ y' = -x & (2) \end{cases}$$

1) En posant  $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  pour des fonctions  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , exprimer  $\frac{dx}{dt}$  en

fonction de  $\rho, \theta, \frac{d\rho}{dt}$  et  $\frac{d\theta}{dt}$

2) Même question pour  $\frac{dy}{dt}$ .

3) En déduire l'ensemble  $\mathcal{L}$  des solutions de (C).

**Exercice 21** ☆ ☆

1. Montrer qu'il existe un monôme  $(t \mapsto t^p$  pour  $p \in \mathbb{N})$  solution de l'équation homogène

$$(\mathcal{H}) \quad t(t+1)y'' - y' - 2y = 0$$

2. Montrer que la fonction  $x \mapsto x^2 \ln(x+1)$  est solution de  $(\mathcal{H})$ .

**Exercice 22** TPE-EIVP

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0.$$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que  $f''$  est à valeurs positives.
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Rappeler l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$
3. En déduire que  $f$  est constante.
4. En déduire une contradiction puis conclure.

**Exercice 23** Centrale PC 2018

On considère l'équation différentielle

$$(E) : ty' - y = 1 - e^t.$$

Préciser les solutions sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$  de (E).

Ces solutions peuvent-elles être prolongées par continuité en 0? Ce prolongement est-il dérivable?

Donner un équivalent de ces solutions en  $0, +\infty, -\infty$ .

## VI. Trajectoires d'un système différentiel

### Exercice 24 Trajectoires d'un système différentiel, cas diagonal réel

Soit  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et semblable (sur  $\mathbb{R}$ ) à la matrice diagonale (réelle)  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  fixée.

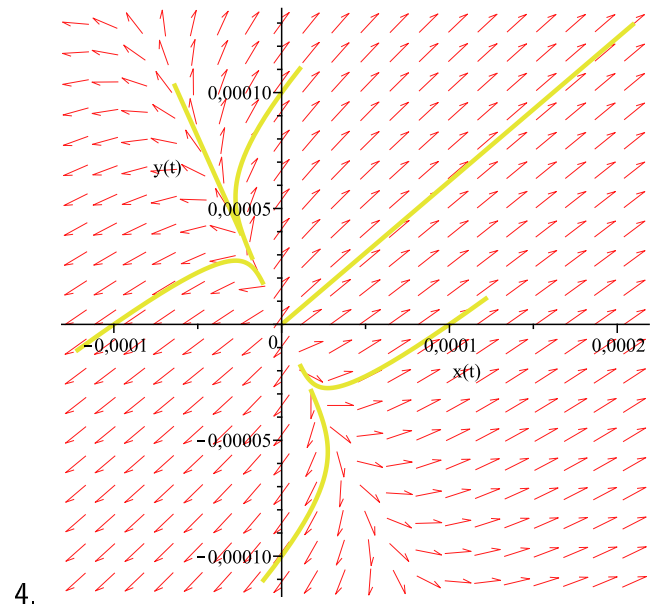
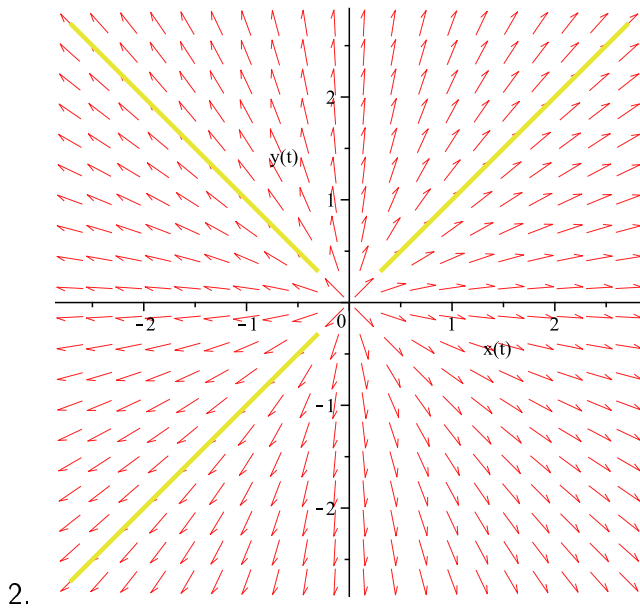
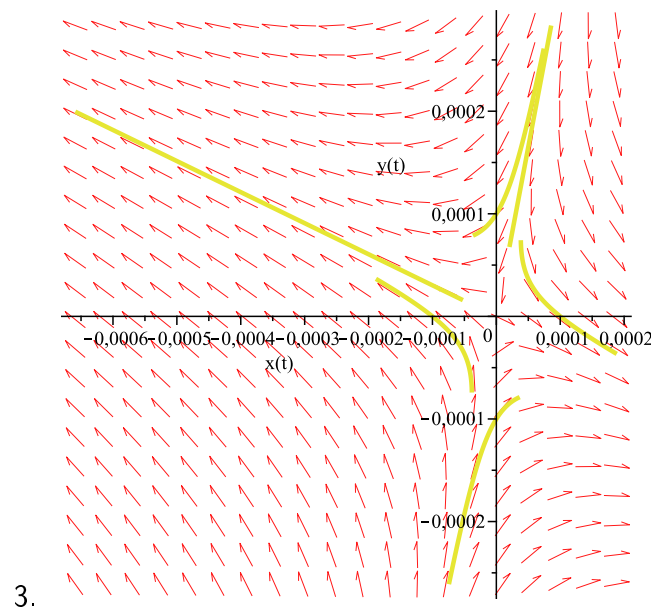
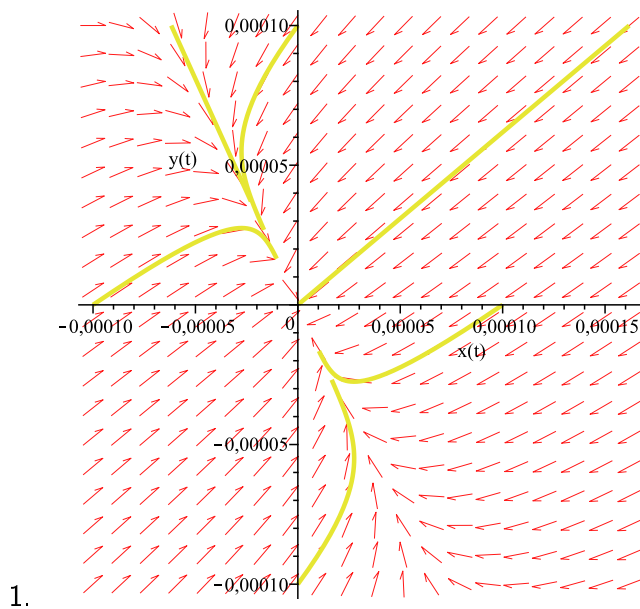
Soient  $x, y$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant le système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

Donc il existe une base  $(V_1, V_2)$  de  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 + e^{\lambda_2 t} V_2$

Reconnaitre dans chaque cas les trajectoires obtenues pour diverses conditions initiales  $M(0) = (x(0), y(0))$

Cas : i)  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  ii)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  iii)  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  iv)  $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$



**Exercice 25** Trajectoires d'un système différentiel, cas complexe

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  fixée possédant deux valeurs propres distinctes non réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Soit  $v_1 = p \vec{i} + q \vec{j}$  un vecteur propre complexe non réel de  $A$  associé à la valeur propre complexe non réelle  $\lambda_1$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  fixés.

On note  $u = \text{Re}(\lambda_1)$  et  $v = \text{Im}(\lambda_1)$

On sait que les solutions complexes sont les  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mu e^{ut} e^{ivt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \mu' e^{ut} e^{-ivt} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix}$ , avec  $\mu, \mu' \in \mathbb{C}$ .

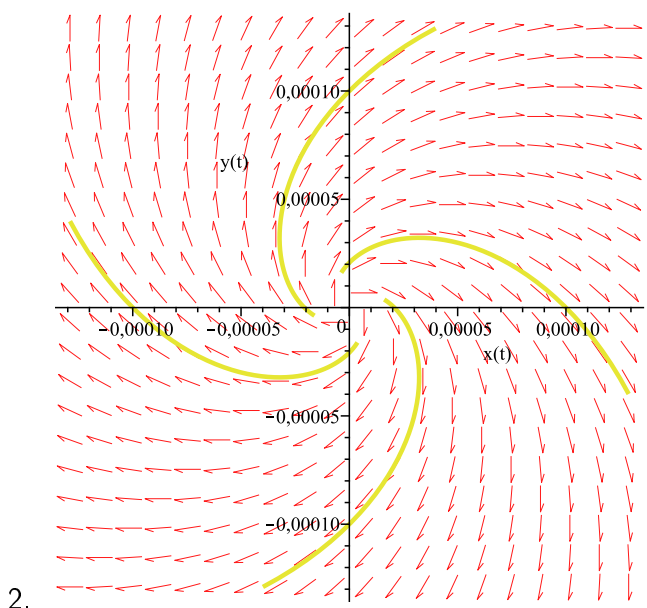
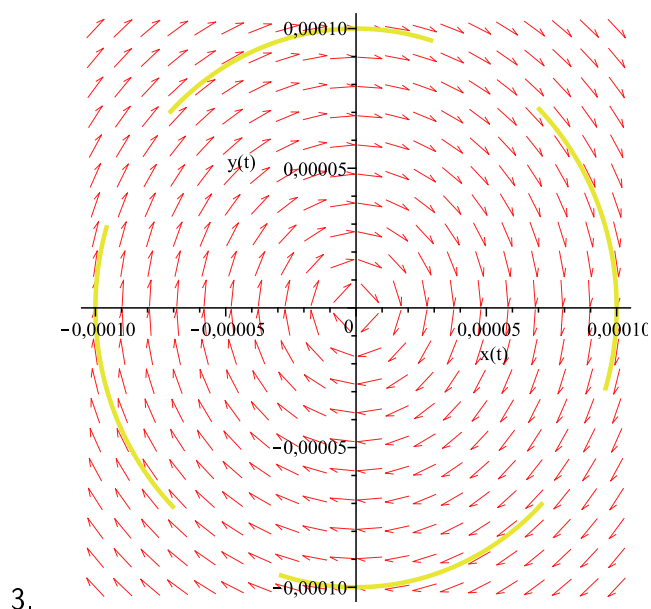
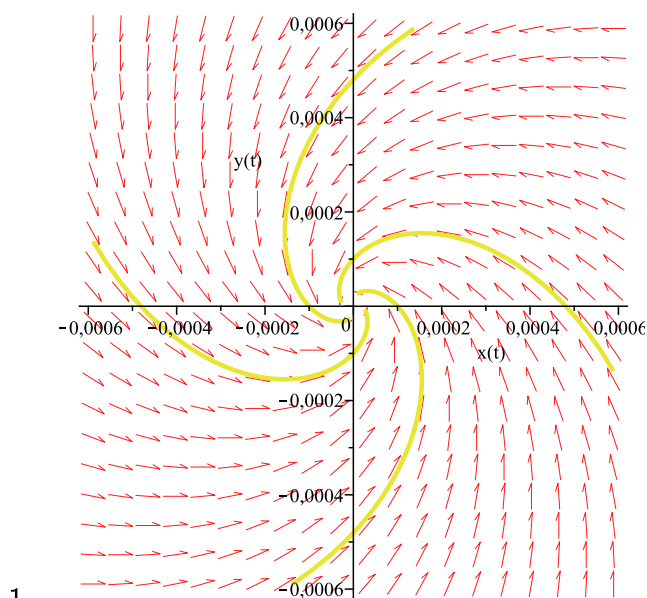
On sait que les solutions réelles sont les  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a e^{ut} \text{Re} \left( e^{ivt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) - b e^{ut} \text{Im} \left( e^{ivt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right)$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Donc il existe une base  $(V_1, V_2)$  de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{ut} \cos(vt) V_1 + e^{ut} \sin(vt) V_2$$

Reconnaitre dans chaque cas les trajectoires obtenues pour diverses conditions initiales  $M(0) = (x(0), y(0))$

Cas : i)  $(u, v) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*$     ii)  $u = 0$  et  $v \in \mathbb{R}_*$     iii)  $(u, v) \in \mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}_*$



# Notes

<sup>1</sup> correction : polynôme caractéristique  $r^2 - \omega^2 = (r - \omega)(r + \omega)$ , solutions  $t \mapsto \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$

<sup>2</sup> correction : polynôme caractéristique  $r^2 + \omega^2 = (r - i\omega)(r + i\omega)$ , solutions  $t \mapsto \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$ , solutions réelles  $t \mapsto a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$

<sup>5</sup> correction : SP  $t \mapsto te^t$ , SH  $t \mapsto$

<sup>21</sup> correction :  $y(x) = (C1 * (\ln(x) + 1/x - 1/(2 * x^2)) - \ln(x + 1)) + C2) * x^2$

$$y(x) = (x - 1/2 - x^2 * \ln(x + 1) + \ln(x) * x^2) * C1 + x^2 * C2 + x^2 * \ln(x + 1)$$

<sup>22</sup> correction :

$$f' \text{ est croissante. } y = f(a) + (x - a)f'(a)$$

comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - a) = +\infty$ , on doit donc avoir  $f'(a) \leq 0$ , puisque  $f$  ne prend que des valeurs négatives.

De même, comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - a) = -\infty$ , on doit donc avoir  $f'(a) \geq 0$

Ainsi,  $f'(a) = 0$ , ce pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . donc  $f$  est constante.

Or  $(E)$  n'admet pas de solution constante non nulle, ce qui est impossible puisque  $f$  prend des valeurs strictement négatives.

Conclusion  $f$  prend au moins une valeur positive.