Méthodes à retenir :

- Les solutions d'une équation de la forme $y'' = ay' + by$ sont données à l'aide des racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.
  Si $r_1 = r_2$, y est de la forme $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta t e^{r_1 t}$
  Si $r_1 \neq r_2$, y est de la forme $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ à déterminer en fonction des conditions initiales $y(t_0)$ et $y'(t_0)$.
  Pour trouver les solutions réelles lorsque $r_1 = \overline{r_2} = u + \mathbf{i}\omega$, avec $u, \omega \in \mathbb{R}$, il suffit de prendre les combinaisons linéaires des solutions complexes,
  de la forme $t \mapsto Ae^{ut}\cos(\omega t) + Be^{ut}\sin(\omega t)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$
- Etant données plusieurs équations différentielles, portant sur des fonctions $x_1, \dots x_n$, il est indispensable de savoir les réécrire sous la forme $X' = AX$, avec une matrice A que l'on sait expliciter.
- Lorsque A est **diagonalisable**, semblable à la matrice diagonale D, avec $D = P^{-1}AP$, pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a : $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$, ce qui permet de se ramener à un système diagonal $Z' = DZ$

I. Révisions de PCSI

Exercice 1 ✩

Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{R}^+$: $y'' - ay = 0 \quad (H)$.

Exercice 2 ✩

Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{R}^+$: $y'' + ay = 0 \quad (H)$.

Exercice 3 ✩

Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$(H) \quad y'' + 3y' - 4y = 0$$

.

Exercice 4 ✩

résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre :
$(E) \quad 2y' - y = e^t$

Exercice 5 ✩

Résoudre l'équation différentielle linéaire du 2d ordre :
$(H) \quad y'' + 2y' + y = 0$
Soit $(E) \quad y'' + 2y' + y = 4\mathrm{e}^t$
résoudre (E).

II. Applications directes du cours

Exercice 6 ✩ ✩

On souhaite résoudre le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcll} x' & = & -y & (1) \\ y' & = & x & (2) \end{array} \right.$$

1. On pose $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
   Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. en déduire les solutions réelles de $(\mathcal{S})$.

Exercice 7 ✩ ✩

On souhaite résoudre le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcll} x' & = & 3x - y & (1) \\ y' & = & -x + 3y & (2) \end{array} \right.$$

1. On pose $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
   Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. en déduire les solutions réelles de $(\mathcal{S})$.

III. A savoir rédiger

Exercice 8 ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) Soient λ_1, et λ_2 les valeurs propres de A, et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$

3) Résoudre le système différentiel

$$(S) \ : \ \begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$$

Exercice 9 ☆☆

Résoudre le système différentiel d'inconnue $(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$:

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= y \end{cases}$$

IV. Exercices

Exercice 10

Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]1, \infty[$: $x(x+2)y' + (x+1)y + (x+1) = 0$

Exercice 11

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y'' + \operatorname{sh}(x)y' + y = 0.$$

1. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $z : x \mapsto y(-x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe une unique solution paire valant 1 en 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 ☆☆☆

1. Résoudre le système différentiel d'inconnue $(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$:
$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x' &= -x + 2y \\ y' &= -3x + 4y \end{cases}$$

2. En déduire les solution du système différentiel $(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$:
$$(\mathcal{S}') \ : \ \begin{cases} x' &= -x + 2y - e^t \\ y' &= -3x + 4y - e^t \end{cases}$$

Exercice 13 ☆☆

Soient $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On admet que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Et on pose $A = PDP^{-1}$.

1. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$, avec $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable.

2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable.

3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 ☆ ☆

1) Justifier que le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x' &= tx + (1-t^2)y \quad (1) \\ y' &= x - ty \quad (2) \end{cases}$$

admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfaisant la condition initiale : $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{CI})$

2) Montrer que si X est une solution de (S), alors x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3) En dérivant (2), montrer que y est solution de l'équation différentielle : $y'' = 0 \quad (\mathcal{E})$

4) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{CI})$.

Exercice 15 *CCP PC*

Le but de l'exercice est de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $(E) : xy'' + xy' - y = 0$.

1. Déterminer un réel α tel que $h_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. Soit $G : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $s : x \longmapsto xf(x)$. Montrer que s est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si f' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E'), que l'on précisera.
5. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide de la fonction G.

V. Pour aller plus loin

Exercice 16 ☆ ☆

Résoudre :

$$y^{(3)} - y = 0$$

Exercice 17 ☆ ☆

On considère l'équation différentielle :
$x^2y'' - 3xy' + 4x = x^2 \quad (E)$
et (H) l'équation homogène associée.

a) Trouver les solutions polynomiales de (H).

b) Trouver toutes les solutions de (H) sur $]0, +\infty[$.

c) Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 18 ☆ ☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On considère une fonction X vérifiant $X'(t) = AX(t)$

1. Montrer que si V est un vecteur propre de A associé à λ et si $X(0) = V$ alors $\forall t,\ X(t) = e^{\lambda t}V$.

2. De façon générale, donner l'expression de $X(t)$ en fonction de $X(0)$.

Exercice 19 ☆ ☆

Soit $(E) \quad ty' + y = 0$

1. Montrer que l'ensemble S_+ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_*^+$ est
$S_+ = \left\{]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto \lambda \frac{1}{t};\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
2. Montrer que l'ensemble S_- des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_*^-$ est
$S_- = \left\{]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto \mu \frac{1}{t};\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$.
3. En déduire que l'ensemble des solutions (dérivable) sur $\mathbb{R}$ est réduit à $\{t \mapsto 0\}$.

Exercice 20 ✰ ✰

On considère le champ de vecteurs défini par

$$(C) \begin{cases} x' = y & (1) \\ y' = -x & (2) \end{cases}$$

1) En posant $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ pour des fonctions $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de ρ, θ, $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

2)Même question pour $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

3) En déduire l'ensemble $\mathcal{L}$ des solutions de (C).

Exercice 21 ✰ ✰

1. Montrer qu''il existe un monôme ($t \longmapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{N}$) solution de l'équation homogène

$$(\mathcal{H}) \quad t(t+1)y'' - y' - 2y = 0$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2\ln(x+1)$ est solution de $(\mathcal{H})$.

Exercice 22 *TPE-EIVP*

Soit l'équation différentielle
$(E) : y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f'' est à valeurs positives.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Rappeler l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a
3. En déduire que f est constante.
4. En déduire une contradiction puis conclure.

Exercice 23 *Centrale PC 2018*

On considère l'équation différentielle
$(E) : ty' - y = 1 - \mathrm{e}^t$.

Préciser les solutions sur $]0, +\infty[$et $]-\infty, 0[$ de (E).

Ces solutions peuvent-elles être prolongées par continuité en 0 ? Ce prolongement est-il dérivable ?

Donner un équivalent de ces solutions en $0, +\infty, -\infty$.

VI. Trajectoires d'un système différentiel $X' = AX$

Exercice 24 *Trajectoires d'un système différentiel, cas diagonal réel*

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et semblable (sur $\mathbb{R}$) à la matrice diagonale (réelle) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ fixée.

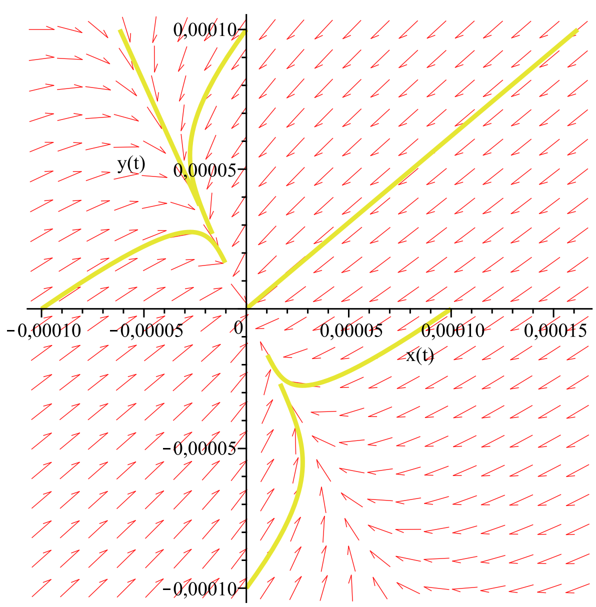
Soient x, y les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel :

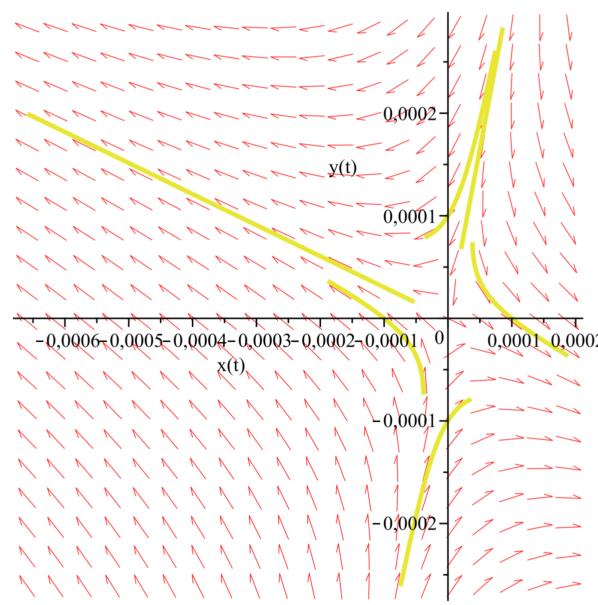
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

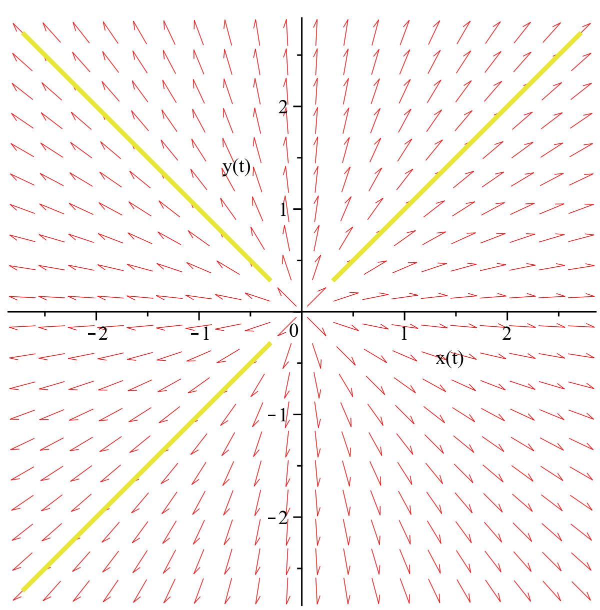
Donc il existe une base (V_1, V_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = ae^{\lambda_1 t}V_1 + be^{\lambda_2 t}V_2$

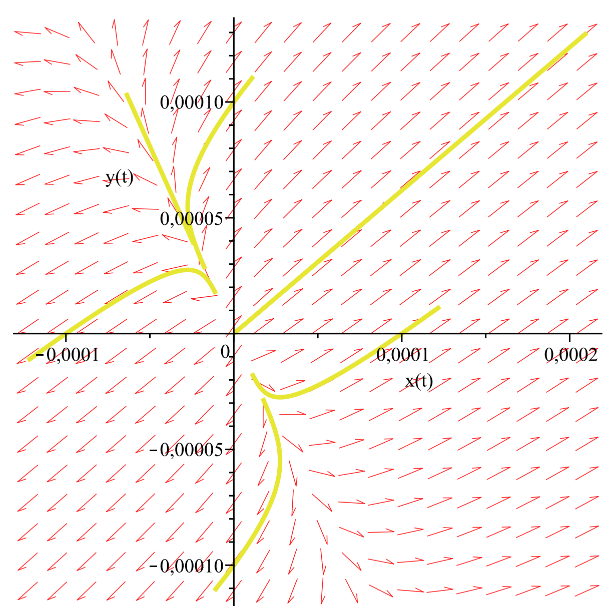
Reconnaître dans chaque cas les trajectoires obtenues pour diverses conditions initiales $M(0) = (x(0), y(0))$

Cas : i) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ii) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ iii)$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ iv)$\lambda_2 = \lambda_1 > 0$

1.


3.


2.


4.


Exercice 25 *Trajectoires d'un système différentiel, cas complexe*

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ fixée possédant deux valeurs propres distinctes non réelles λ_1 et λ_2. Soit $v_1 = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j}$ un vecteur propre complexe non réel de A associé à la valeur propre complexe non réelle λ_1, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fixés.

On note $u = \mathrm{Re}(\lambda_1)$ et $v = \mathrm{Im}(\lambda_1)$

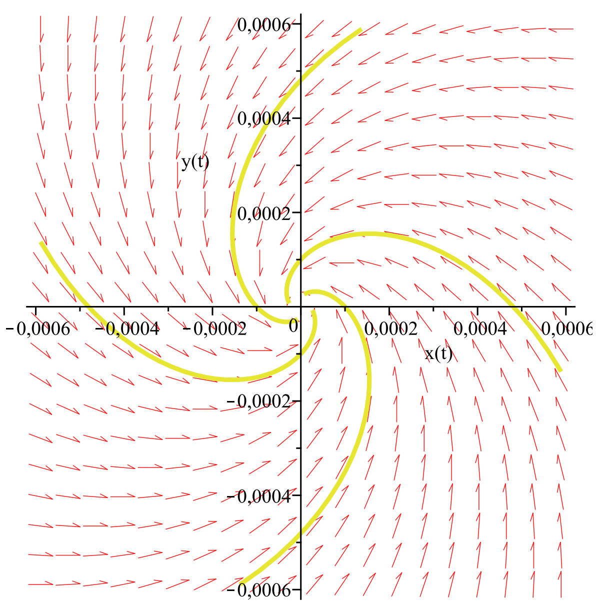
On sait que les solutions complexes sont les $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mu \mathbf{e}^{ut}\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \mu' \mathbf{e}^{ut}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} \overline{p} \\ \overline{q} \end{pmatrix}$, avec $\mu, \mu' \in \mathbb{C}$.

On sait que les solutions réelles sont les $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\mathbf{e}^{ut}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) - b\mathbf{e}^{ut}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}vt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

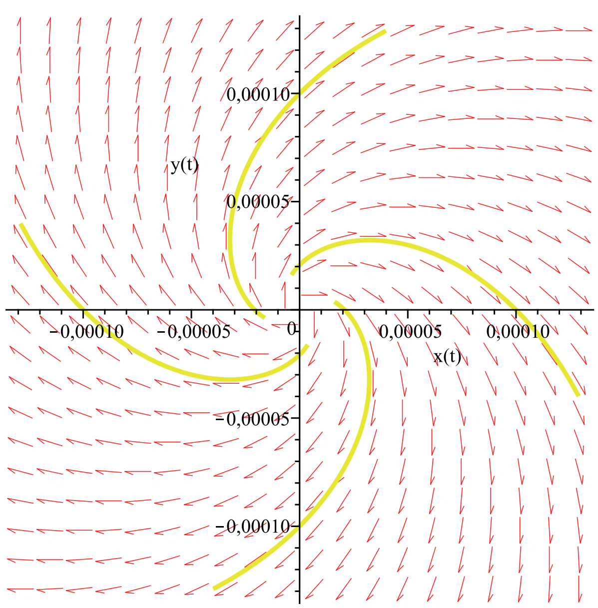
Donc il existe une base (V_1, V_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{ut}\cos(vt)V_1 + e^{ut}\sin(vt)V_2$

Reconnaître dans chaque cas les trajectoires obtenues pour diverses conditions initiales $M(0) = (x(0), y(0))$

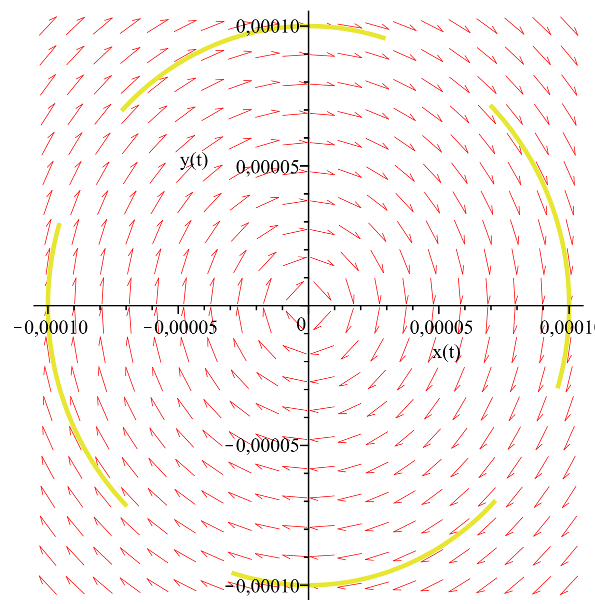
Cas : i) $(u, v) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*$ ii) $u = 0$ et $v \in \mathbb{R}_*$ iii) $(u, v) \in \mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}_*$



1.



2.



3.

Notes

[1] correction : polynôme caractéristique $r^2-\omega^2=(r-\omega)(r+\omega)$, solutions $t\mapsto \lambda e^{\omega t}+\mu e^{-\omega t}$

[2] correction : polynôme caractéristique $r^2+\omega^2=(r-\mathbf{i}\omega)(r+\mathbf{i}\omega)$, solutions $t\mapsto \lambda e^{\mathbf{i}\omega t}+\mu e^{-\mathbf{i}\omega t}$, solutions réelles $t\mapsto a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$

[5] correction : SP $t\mapsto te^t$, SH $t\mapsto$

[10] correction :

la fonction $x\mapsto x$ est solution particulière ?

[17] correction :

x^2

$\lambda(x)*x^2$

puis idem pour solution particulière

---

[21] correction : $y(x)=(C1*(ln(x)+1/x-1/(2*x^2)-\ln(x+1))+C2)*x^2$

$y(x)=(x-1/2-x^2*ln(x+1)+ln(x)*x^2)*C1+x^2*C2+x^2*\ln(x+1)$

[22] correction :

f' est croissante. $y=f(a)+(x-a)f'(a)$

comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)=+\infty$, on doit donc avoir $f'(a)\leq 0$, puisque f ne prend que des valeurs négatives.

De même, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)=-\infty$, on doit donc avoir $f'(a)\geq 0$

Ainsi, $f'(a)=0$, ce pour tout $a\in\mathbb{R}$. donc f est constante.

Or (E) n'admet pas de solution constante non nulle, ce qui est impossible puisque f prend des valeurs strictement négatives.

Conclusion f prend au moins une valeur positive.