Méthodes à retenir :

- Savoir calculer les probabilités de réunions d'évènements incompatibles à l'aide d'une somme, d'intersection d'évènements indépendants à l'aide d'un produit
- Savoir écrire $\Omega = \cup A_i$, avec (A_i) une famille d'évènements incompatibles pour utiliser la formule des probabilités totales.
- Savoir calculer un évènement par conditionnement, avec la notation des probabilités conditionnelles.
- Combiner ces deux approches au sein de la formule de Bayes
- Justifer qu'on définit une variable aléatoire discrète lorsque la somme de la série à termes positifs correspondante vaut 1
- $\bigcap_{p\geq n} A_p$ signifie que pour tout $p \geq n$, A_p est vrai. Lorsque l'intersection est décroissante, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\geq n} A_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}(A_p)$
- $\bigcup_{p\geq n} A_p$ signifie qu'il existe au moins un $p \geq n$ tel que A_p est vrai. Lorsque la réunion est croissante, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}(A_p)$

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰ *probabilités totales*

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 6 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 3 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 2 ✰✰ *probabilités composées*

On fait parcourir à un rat un labyrinthe, dont l'extrémité donne accès à trois boîtes vides et une boîte contenant des friandises. Lorsqu'il accède à une boîte vide, une trappe le ramène à son point de départ et il revient choisir une nouvelle boîte.

1. On suppose que le rat mémorise parfaitement toutes les boîtes déjà visitées. Montrer qu'il fera au plus 4 passages dans le labyrinthe, et déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.
2. On suppose que le rat mémorise courte : il mémorise seulement la dernière boîte visitée. Déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.
3. On suppose que le rat oublie tout le passé. Déterminer la loi du nombre N de tentatives nécéssaires avant de trouver la boîte à friandises.

Exercice 3 ✰✰

$1/8$ de la population des cinquantenaires a fumé régulièrement du tabac (fumeur ou ex-fumeur). Parmi les cinquantenaires fumeurs ou ex-fumeurs, on compte $1/10$ de malades atteints de troubles respiratoires.

Parmi les cinquantenaires atteints de troubles respiratoires, on compte 7 fumeurs ou ex-fumeurs pour un non-fumeur.

Quelle est la probabilité pour qu'un cinquantenaire non-fumeur soit atteint de troubles respiratoires ?

Exercice 4 ✰✰

Dans un établissement, trois classes C_1, C_2, C_3 dont les effectifs sont respectivement de 22, 33 et 30 élèves ont des taux d'intégration respectifs à CCP de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Un élève a intégré CCP. Quelle est la probabilité pour qu'il vienne de la troisième classe ?

Exercice 5 ✰✰

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Etablir que

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)\ \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}_{\bar{B}}(A)\ \mathbf{P}(\bar{B})$$

II. Exercices

Exercice 6 ✰ ✰

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $\mathbb{P}(N = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur ($G < 0$ si le joueur perd), donnez la loi de G.

Exercice 7 ☆ ☆

1. Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour avoir au moins une chance sur quatre d'obtenir un « pile » ?
2. Même question avec deux pièces pour obtenir un « double-pile »

Exercice 8 ☆ ☆

L'oral d'un concours comporte au total 100 questions de cours ; chaque jour, trois questions sont tirées au sort et posées sur la journée aux différents candidats.Un candidat se présente en ayant révisé 60 questions sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois questions du jour ;
   (b) exactement deux questions sur les trois ;
   (c) aucune des trois.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 9 ☆ ☆

Une famille possède deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2. Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
3. On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que le deuxième le soit aussi ?

Exercice 10 ☆ ☆

On tire avec remise un grand nombre de fois dans un sac contenant 5 pièces numérotées de 1 à 5. On note p_n la probabilité que la somme des n premiers tirages soit paire.

1. Calculer p_1. Exprimer p_n en fonction de p_{n-1} pour $n \geq 2$.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de $n \geq 1$.

Exercice 11 ☆ ☆ *formule de Bayes*

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 12 ☆

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p.
Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

Exercice 13 ☆ ☆ ☆

On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leqslant n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.
Les répartitions possibles sont équiprobables.
a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

A : « chaque urne contient au plus une boule »

b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

B : « il existe une urne contenant au moins deux boules »

III. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆ ☆ ☆

Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour quelle valeur de k, la probabilité

$$p_k = \mathbf{P}(X = k)$$

est-elle maximale ?

Exercice 15 ☆ ☆

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Montrer que

$$\mathbf{P}(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 16 ☆☆

On considère une infinité de tirages consécutifs (mutuellement indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, X_i vaut 1 si on obtient face lors du $i$ème lancer, 0 si on obtient pile lors du $i$ème lancer.

1. Que représente l'évènement $E_i = \{X_i = X_{i+1}\}$?
2. Que représente l'évènement $V_N = \bigcap_{i=1}^{N} E_i$?
3. Calculer $\mathbf{P}(V_N)$, en fonction de $N \in \mathbb{N}^*$.
4. Justifier l'existence et calculer la limite $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(V_N)$.

Exercice 17 ☆ ☆ ☆ *Probabilités et opérations*

Soit n un entier strictement supérieur à 3 ; n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (évènement noté A) ?

Exercice 18 ☆ ☆ ☆ *Formule des probabilités composées, formule de Bayes*

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On réalise k tirages en remettant dans l'urne la boule tirée si elle est noire et en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
2. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche durant les k tirages ?
4. On suppose que la deuxième boule tirée est noire. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

Exercice 19 ☆ ☆

Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 20 ☆ ☆ ☆

On considère une pièce de monnaie telle qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir face est égale à $2/3$. On lance cette pièce plusieurs fois de suite. Si on obtient face deux fois de suite, on dit que l'on a obtenu un doublé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "on obtient un doublé pour la première fois à l'issue du $(n+1)$-ème lancer"et D_n l'évènement"on obtient au moins un doublé au cours des $n+1$ premiers lancers. " Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement A_n. On désigne par B l'évènement : "le premier lancer donne pile "et par C l'évènement : “ le premier lancer donne face et le deuxième lancer donne pile . ”

1. Calculer p_1, p_2, p_3
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbf{P}_B(A_{n+2}) = \mathbf{P}(A_{n+1})$ et $\mathbf{P}_C(A_{n+2}) = \mathbf{P}(A_n)$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$
4. Déterminer p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
5. Calculer la probabilité de D_n .

Notes

[1] correction : Formule probabilités totales

[2] correction : 1) bonne porte pour la première fois lors de la n ème tentative : $B_n = \overline{A_1} \cap \dots \overline{A_{n-1}} \cap A_n$, $\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_2) = \frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_3) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(B_4) = \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{4}$. 2) $\mathbf{P}(B_n) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3}$

3) N suit la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{4})$.

[3] correction : $P(F) = 1/8$, $P_F(M) = P(M \cap F)/P(F) = \frac{1}{10}$, $P_M(F) = P(M \cap F)/P(M) = \frac{7}{8}$.

$$P(M \cap F) = P(F)P_F(M) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$$

$$P(M) = P(M \cap F)/P_M(F) = \frac{1}{80} \times \frac{8}{7} = \frac{1}{70}$$

$$P_{\overline{F}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(M) - P(M \cap F)}{1 - P(F)} = \left(\frac{1}{70} - \frac{1}{80}\right) \times \frac{8}{7} = \frac{10 * 8}{70 * 80 * 7} = \frac{1}{490}$$

[4] correction : $\mathbf{P}_X(0) = 1/8 + 2/8 = 3/8$, $\mathbf{P}_X(1) = 3/8 + 2/8 = 5/8$, $\mathbf{P}_Y(0) = 1/8 + 3/8 = 1/2$, $\mathbf{P}_Y(1) = 2/8 + 2/8 = 1/2$

Non, X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbf{P}((0,0)) = 1/8 \neq 3/8 * 1/2 = 3/16$

[8] correction :

1. L'ensemble des tirages possibles Ω possède $\binom{100}{3}$ éléments.
   $[X = k]$ correspond à tirer k sujets parmi les 60 révisés, et $3 - k$ parmi les 40 non révisés.
   (a) $\mathbb{P}[X = 3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 0.212$
   (b) $\mathbb{P}[X = 2] = \frac{\binom{60}{2}\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}} \approx 0.438$
   (c) $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 6.1 * 10^{-2}$
2. $\mathbb{P}[X = 1] \approx .289$
   $\mathbb{E}[X] \approx 1.8$

[9] correction :

1. $\mathbb{P}(GG) = 1/4$
2. $\mathbb{P}_{G1}(G2) = \frac{\mathbb{P}(GG)}{\mathbb{P}(G1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$
3. On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que le deuxième le soit aussi ?

[10] correction : $p_n = \frac{2}{5}p_{n-1} + \frac{3}{5}(1 - p_{n-1}) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_{n-1}$

point fixe $\frac{1}{2}$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ est géométrique $u_n = \frac{-1}{10}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2 \times 5^n}$

[11] correction :

1. Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a $\mathbf{P}(M) = 10^{-4}$, $\mathbf{P}_M(T) = 0,99$ et $\mathbf{P}(T|\bar{M}) = 10^{-3}$
   Par la formule des probabilités totales $\mathbf{P}(T) = P_M(T)P(M) + P_{\bar{M}}(T)P(\bar{M})$
   puis par la formule de Bayes $\mathbf{P}_T(M) = P(M \cap T)P(T) = P_M(T)P(M)P(T)$
   ce qui numériquement donne 9%.
   La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de $1/10000$ et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de $1/1000$.

[13] correction :

1. Il y a n^r répartitions, et $n \times \cdots \times (n-r+1)$ injections de $[\![1, n]\!]$ vers lui-même, d'où la probabilité $\dfrac{n \times \cdots \times (n-r+1)}{n^r}$
2. On passe au complémentaire

[14] correction :

$$p_k/p_{k-1} \geq 1 \Longleftrightarrow k \leq (n+1)p$$

En notant k_0 la partie entière de $(n+1)p$. La suite $(pk)_{0 \leq k \leq k_0}$ est croissante et la suite $(p_k)_{k_0 \leq k \leq n}$ est décroissante. Le maximum de p_k est donc atteint en $k = k_0$.

[19] correction :

1. On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$.
   Supposons connu p_n. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales $p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$
   La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence $p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$
   Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique à pour terme général $p_n = (1 + (2p-1)^{n-1})/2$
   Si $p \in]0, 1[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \to 1/2$.

[20] correction :

1. La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.
2. On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$