Méthodes à retenir :

- Savoir calculer les probabilités de réunions d'évènements incompatibles à l'aide d'une somme, d'intersection d'évènements indépendants à l'aide d'un produit
- Savoir écrire $\Omega = \cup A_i$, avec (A_i) une famille d'évènements incompatibles pour utiliser la formule des probabilités totales.
- Savoir calculer un évènement par conditionnement, avec la notation des probabilités conditionnelles.
- Combiner ces deux approches au sein de la formule de Bayes
- Justifer qu'on définit une variable aléatoire discrète lorsque la somme de la série à termes positifs correspondante vaut 1
- $\bigcap_{p\geq n} A_p$ signifie que pour tout $p \geq n$, A_p est vrai. Lorsque l'intersection est décroissante, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{p\geq n} A_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}(A_p)$
- $\bigcup_{p\geq n} A_p$ signifie qu'il existe au moins un $p \geq n$ tel que A_p est vrai. Lorsque la réunion est croissante, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{p\geq n} A_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbf{P}(A_p)$

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ✰

On jette 5 dés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 faces identiques ?

Exercice 2 ✰

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 6 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 3 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 3 ✰

La probabilité d'atteindre le centre de la cible aux fléchettes objectif avec un certain canon est égale à 5%. Quel est le nombre minimum de coups à tirer pour avoir une probabilité de 99% d'atteindre au moins une fois le centre ?

Exercice 4 ✰✰✰

Un entrepreneur de transports possède deux autocars qu'il peut louer chaque jour pour la journée. Le nombre de demandes présentées par jour est distribué approximativement suivant une loi de Poisson de moyenne égale à 1,5.

1) Calculer :

a) la proportion des jours pour lesquels aucune demande n'est présentée,

b) la proportion des jours pour lesquels les demandes ne peuvent pas être entièrement satisfaites.

2) Si les deux véhicules sont utilisés de façon à satisfaire le même nombre de demandes, quelle est la proportion des jours pour lesquels un autocar donné n'est pas en service ?

3) Quelle est la proportion du nombre total des demandes qui est refusée ?

Exercice 5 ✰✰

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. On note, pour $1 \leq i \leq 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $\mathbf{P}(A_i)$.
2. Quelle est la loi de S (justifier !) ?
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Exercice 6 ✰✰

L'assemblage de l'aile d'un avion nécessite 2500 rivets. La probabilité pour que l'un des rivets utilisés soit défectueux est égale à 0,002. Quelles sont les probabilités pour que, sur l'aile :

1) Il n'y ait aucun rivet défectueux.

2) Il y en ait au moins N=10.

Exercice 7 ✰ *probabilités composées*

Une urne contient 4 boules blanches et 4 boules noires. On tire une à une et sans remise 4 boules. Quelle est la probabilité que les trois premières soient blanches et que la quatrième soit noire ?

II. A savoir rédiger

Exercice 8 ✰

On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 52. Calculer la probabilité pour que l'une au moins soit un valet.

Exercice 9 ✰ ✰

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Calculer $\mathbf{P}([Z \text{ est pair}])$ et $\mathbf{P}([Z \text{ est impair}])$

III. Exercices

Exercice 10 ☆☆

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Etablir que

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)\ \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}_{\bar{B}}(A)\ \mathbf{P}(\bar{B})$$

Exercice 11 ☆☆

On note S la somme de deux dés équilibrés à 6 faces, et T le maximum obtenu.

1. Déterminer la loi de S.
2. Déterminer la loi de T.

Exercice 12 ☆ ☆

Monsieur et Madame Dupont ont deux enfants.

1) Ils vous informent que l'un des deux est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon ?

2) Ils précisent que l'aîné de leurs deux enfants est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus jeune enfant soit un garçon ?

Exercice 13 ☆ ☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Montrer que ma série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k+1}\mathbf{P}(X=k)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 14 ☆ ☆

1. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Exprimer $P(X=k+1)$ en fonction de $P(X=k)$. Écrire un programme Python loi_de_X(n,p) qui retourne la liste des $P(X=k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ en utilisant la formule précédente.

2. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$. Exprimer $P(Y=k+1)$ en fonction de $P(Y=k)$.

Écrire un programme Python loi_de_Y(n,p) qui retourne la liste des $P(Y=k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ en utilisant la formule précédente.

3. Écrire une fonction Python renvoyant la plus grande valeur de $|P(X=k) - P(Y=k)|$.

Exercice 15 ☆ ☆

Un joueur dans un casino joue sur une machine qui renvoie un entier N dans $\mathbb{N}^*$ selon la probabilité $\mathbb{P}(N=n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair le joueur gagne n jetons et si n est impair, le joueur perd n jetons.

1. Calculez la probabilité de gagner à ce jeu.
2. Soit G le gain algébrique du joueur ($G<0$ si le joueur perd), donnez la loi de G.

Exercice 16 ☆ ☆

Un animal se déplace entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t=0$, il se trouve en A. Lorsqu'il a bu toute l'eau d'un point, il se déplace vers l'un des deux autres avec la même probabilité. On considère que l'eau se régénère après qu'il soit parti du point d'eau. On note :
$a_n = P(\text{"l'animal est en } A \text{ à } \ t=n\text{"})$
$b_n = P(\text{"l'animal est en } B \text{ à } \ t=n\text{"})$
$c_n = P(\text{"l'animal est en } C \text{ à } \ t=n\text{"})$.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n. De même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ a/ Justifier que A est diagonalisable. b/ Justifier que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A. c/ Trouver D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Exercice 17 ☆ ☆

On considère une expérience à n joueurs $J_0, \ldots, J_{n-1}$. Chaque tour, chaque joueur joue avec une probabilité $p_k \in]0,1[$ de gagner (p_0 pour J_0, p_1 pour J_1, etc...). Si aucun ne gagne, ils recommencent un nouveau tour et ainsi de suite tant que personne ne gagne. On note $q_k = 1 - p_k$, $q = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} q_k$ et $p = 1 - q$. On note aussi V_k l'événement "le joueur k gagne" et T la variable aléatoire donnant le numéro du tour gagnant (tour où, pour la première fois, un joueur a gagné).

1. Donner la loi de T ainsi que son espérance et sa variance.

2. a) Écrire une fonction prenant en argument une liste $[\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_{n-1}]$ et simulant l'expérience précédemment décrite.

b) Écrire une fonction prenant en argument une liste $[\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_{n-1}]$ et renvoyant sur un grand nombre d'expériences une estimation de $P(V_k)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

3. Calculer les $P(V_k)$ en fonction des données de l'énoncé.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_k pour que les $P(V_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, soient égales. Vérifier cette condition grâce à la fonction de la question 2.b) en prenant $n = 4$, $p_0 = 0,3$, $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,8$. On rajoute maintenant une cagnotte à l'expérience. A chaque fois qu'il perd, le joueur doit mettre 1 euro dans la cagnotte. Le joueur qui gagne rafle la cagnotte. On note G_k le gain algébrique de chaque joueur. Par exemple, pour 4 joueurs J_0, J_1, J_2, J_3, si J_1 gagne au troisième tour, on aura $G_0 = -3$, $G_1 = 7$, $G_2 = -2$, $G_3 = -2$ et $G = 7$.

5. a) Écrire une fonction `Python` prenant en argument une liste $[\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_{n-1}]$ et renvoyant les gains $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ obtenus après simulation d'une expérience.

Exercice 18 ☆☆☆

Un lot d'articles doit être testé par prélèvement, aux fins de réception par l'acheteur. Au regard de critères purement techniques, un article peut être classé, après essai, en bon ou mauvais.

Le test est réglé de la façon suivante. On prend deux articles au hasard dans le lot. S'ils sont bons, tous les deux, le lot est accepté. Si les deux sont mauvais, le lot est refusé. Si l'un est mauvais, l'autre bon, on tire de nouveau deux articles au hasard. Si ces deux derniers articles sont bons, le lot est accepté. Sinon, le lot est définitivement refusé.

Calculer en fonction de la proportion ω d'articles défectueux dans le lot (proportion réelle, mais inconnue de la personne qui fait le test) la probabilité p d'acceptation du lot. On admettra que les tirages sont faits de façon non exhaustive ou, ce qui revient au même, que la taille du lot est suffisamment grande pour que la proportion ω reste inchangée quel que soit le résultat d'un tirage. Tracer la courbe $p(\omega)$, appelée "courbe d'efficacité".

Exercice 19

On considère deux urnes A et B. À l'instant initial l'urne A contient p particules et B est vide. À chaque instant (discrétisé) une particule choisie aléatoirement passe d'une urne à l'autre. Soit T une variable aléatoire modélisant le premier instant auquel on revient à l'état initial.

1. Montrer que l'on ne peut revenir à l'état initial que pour des instants pairs. (On pourra montrer que le nombre de particules dans l'urne B est de la même parité que le numéro de l'instant.) Calculer $\mathbf{P}(T=2)$, $\mathbf{P}(T=4)$.

2. On modélise l'état des particules à un instant donné par une liste L de longueur p où chaque élément vaut 1 si la particule correspondante est dans A, 0 si elle est dans B. Écrire une fonction Python ehrenfest(L) qui modélise le passage de l'instant n à l'instant $n+1$. On pourra utiliser la fonction randint(p) importée du module random.

3. Écrire une fonction Python experience(p) qui modélise l'expérience avec p particules et renvoie le premier instant où on retrouve l'état initial (cad la valeur de T.

4. Écrire une fonction Python moyenneT(n,p) renvoyant la valeur moyenne de T pour n expériences avec p particules. Tracer la courbe de la valeur moyenne de T en fonction de p. Quelle conjecture faire sur la limite de T quand $p \to +\infty$?

5. Quel phénomène thermodynamique est modélisé par cette expérience ?

Exercice 20

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n est $\dfrac{1}{2^n}$. Lorsque $k \in \mathbb{N}^*$, on pose A_k l'événement "n est multiple de k".

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Pour tous p et q, entiers strictement supérieurs à 1, que dire des événements A_p et A_q ?

Exercice 21 *Mines-Ponts*

Soit n un entier naturel non nul. On organise un tournoi de football entre $2n$ équipes : n de première division, n de deuxième division.

1) On note a_n la probabilité que chaque match fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer a_n, en donner un équivalent.

2) On note b_n la probabilité qu'aucun match ne fasse s'opposer une équipe de première division avec une de seconde. Calculer b_n, en donner un équivalent.

Exercice 22 ☆ ☆ *formule de Bayes*

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 23 ☆ ☆ ☆ *Probabilités et opérations*

Soit n un entier strictement supérieur à 3 ; n personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et de façon indépendante. L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on précisera.

Quelle est la probabilité qu'une personne exactement obtienne un résultat différent des $n-1$ autres personnes (évènement noté A) ?

Exercice 24 ☆ ☆ ☆ *Formule des probabilités composées, formule de Bayes*

Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On réalise k tirages en remettant dans l'urne la boule tirée si elle est noire et en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
2. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche et toutes les autres noires ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche durant les k tirages ?
4. On suppose que la deuxième boule tirée est noire. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?

Notes

[1] correction : Pour cet exercice, on décomposera la probabilité en somme de probabilités incompatibles. On peut travailler sur une seule face, puis étendre ensuite aux 6 faces.

[2] correction : Formule probabilités totales

[5] correction :

1. Notons C_i l'évènement “le candidat connait la réponse à la i-ème question.”. On a $P(A_i) = P_{C_i}(A_i)P(C_i) + P_{\overline{C_i}}(A_i)P(\overline{Ci}) = 1 \times p + \dfrac{1}{4} \times (1-p) = \dfrac{1+3p}{4}$.
2. Les questions étant toutes indépendantes, on est en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable S qui compte le nombre de bonnes réponses suit une loi binomiale de paramètres 40 et $\dfrac{1+3p}{4}$.
3. L'espérance de S vaut $E(S) = 40\dfrac{1+3p}{4} = 10(1+3p)$. On a donc $E(S) \geq 36$ si et seulement si $10(1+3p) \geq 36$, ce qui revient à dire $p \geq \dfrac{13}{15}$.

[7] correction : Formule probabilités composées

[12] correction : Attention au piège : la réponse n'est pas identique en a) et b). Pensez à considérer dans chaque cas l'ensemble des événements possibles et ceux qui sont favorables.

[18] correction : Cet exercice illustre le procédé de contrôle progressif : si les résultats du tirages sont très bons ou très mauvais, on arrête. S'ils sont mitigés, on procède à un second test pour préciser.

[22] correction :

1. Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a $\mathbf{P}(M) = 10^{-4}$, $\mathbf{P}_M(T) = 0,99$ et $\mathbf{P}(T|\bar{M}) = 10^{-3}$
   Par la formule des probabilités totales $\mathbf{P}(T) = P_M(T)P(M) + P_{\bar{M}}(T)P(\bar{M})$
   puis par la formule de Bayes $\mathbf{P}_T(M) = P(M \cap T)P(T) = P_M(T)P(M)P(T)$
   ce qui numériquement donne 9%.
   La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de $1/10000$ et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de $1/1000$.