*Méthodes à retenir :*

- Connaître avec précisions les définitions de produits scalaires, normes, normes associées à un produit scalaire ; savoir les vérifier sur des exemples
- Savoir exprimer avec $\varepsilon$ les limites dans un e.v.n.
- Savoir exprimer avec $\varepsilon$ la continuité d'une application $f$ allant d'une e.v.n. vers un autre.

# I. Produits scalaires

**Exercice 1** ☆☆ *Produit scalaire*

Démontrer que $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et valeurs réelles.

# II. Normes

**Exercice 2** ☆

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application $N$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ N(x) = \max(|x_1+x_2|,|x_1|,|x_2|)$
est une norme, puis dessiner la boule fermée $B_f(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; N(x) \leq 1\}$.

**Exercice 3** ☆☆ *Norme infinie d'une fonction*

Soit $I = [a,b]$ un segment.

Justifier que $\|\ \|_{\infty,I} : f \longmapsto \sup_{t\in I}\{|f(t)|\}$ est une norme sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $I$.

**Exercice 4** ☆☆☆ *Norme matricielle*

On appelle trace d'une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ le nombre noté $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ égal à la valeur de la somme des coefficients diagonaux d'une matrice.

1. Démontrer que l'application
$$(M,N) \longmapsto \mathrm{tr}(M^T \times N)$$
définie un poduit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que l'application
$$N : M \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}(M^T \times M)}$$
définie une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

# III. Limites

**Exercice 5**

En remarquant que $\|\ \|_\infty : M \mapsto \max\{|M_{ij}|,\ i,j \in [\![1,n]\!]\}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée une suite $(M_p)_p$ de matrices qui converge vers une limite $M$, comment peut-on quantifier cette limite, avec $\varepsilon > 0$ ?

# IV. Continuité

**Exercice 6**
Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction :
$f : (x,y) \mapsto y\sqrt{1-x^2}$

**Exercice 7**
Étudier la continuité en (0,0) de la fonction
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On pourra condidérer $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,-t)$

**Exercice 8**
Étudier la continuité en (0,0) de la fonction
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

# V. Pour aller plus loin

**Exercice 9** *Normes Vectorielles*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ : $\|X\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$, $\|X\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2}$, $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

1. Vérifier que $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes.
2. Montrer que :
   $\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$
3. Montrer que :
   $\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

**Exercice 10**
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que :
$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}$ et $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ sont des normes sur $E$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et
   $$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 1-nt & \text{si} \quad t \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si} \quad t > 1/n \end{cases}$$
   Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$
3. Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

**Exercice 11** *Normes en dimension infinie*
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $N ; f \longmapsto \int_0^1 e^x|f(x)|\mathrm{d}x$

1. Montrer que $N$ est une norme.
2. pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$f_n : x \longmapsto \begin{cases} = \quad 1-nx & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ = \quad 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$
   (a) tracer les graphes de $f_4$ et $f_{10}$.
   (b) Déterminer les suites $(N(f_n))_n$ et $(\|f_n\|_\infty)_n$.
   (c) les normes $N$ et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

**Exercice 12** *point fixe contractant*
Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\|\ \|$ une norme sur $E$. Soit $f : E \to E$ telle qu'il existe $k \in ]0,1[$ et $a \in E$ vérifiant :
$f(a) = a$ ;
$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$.
Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

**Exercice 13** *fonctions höldériennes*
Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\|\ \|$ une norme sur $E$. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :
$\forall (x,y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x-y\|^\alpha$. Montrer que $h$ est continue sur $E$.

**Exercice 14** ✰✰✰✰ *« Norme matricielle »*
Sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$\|M\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |M_{ij}|$ pour $M = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ ;
a) démontrer que $\| \ \|$ est une norme.

b) vérifier que pour tous $M$ et $M'$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ : $\|MM'\| \leq \|M\|\|M'\|$ ;

c ) $\mathrm{tr}(M)$ désignant la trace de $M$, c'est à dire la somme de ses coefficients diagonaux, déterminer
$|\!|\!|\mathrm{tr}|\!|\!| = \sup\{|\mathrm{tr}(M)| \ ; M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \ \|M\| = 1\}$.

# Notes

[2] correction : préciser les bords