Méthodes à retenir :

- Avant de calculer des expressions de dérivées partielles, on justifie rapidement que les fonctions de 2 variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point, sinon il faut revenir aux limites de taux d'accroissements.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes. Lorsqu'elles existent, déterminer les dérivées partielles par rapport à x et à y de ces fonctions sur ces ensembles.

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$.
2) $g(x,y) = \ln(1+xy)$.
3) $h(x,y) = x^{y^2+1}$.

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x,y) = x^2y^2 - y^4$, et $A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
1) Déterminer le gradient de f en A. En déduire les extrema éventuels de f.
2) Déterminer la différentielle $\mathrm{d}f_A$ de f en A.

Exercice 3

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2+2y^2 = 3$ au point $M = (1;1)$.

Exercice 4

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2+4y^2+4z^2 = 1$ au point $A = (0;1/2;0)$.

Exercice 5

Résoudre l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - y \quad (E)$$

Exercice 6

Déterminer les éventuels points critiques des fonctions suivantes :
1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{ch}(xy)$.
2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$g(x,y) = x^4 - 2y^2$.

II. Exercices

Exercice 7 ☆☆ *CCINP PC*

1) Soit $g : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow x\exp(\frac{1}{x}) + \exp(x)$. Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longrightarrow x\exp(y) + y\exp(x)$. Montrer que si (x_0,y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$ *et* $x_0y_0 = 1$ *et* $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
3) Soit $x \longrightarrow f(-1+ax, -1+x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
4) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
5) Notons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \mid x \mid \leq 1 \text{ et } \mid y \mid \leq 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

Exercice 8 ☆☆ *Mines-Télécom*

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variable $u = 2x - 3y$, $v = x + y$.

Exercice 9 ☆☆ *ESIEE*

Déterminer les fonctions Ψ de classe C^1 de $]0,+\infty[^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in\ ]0,+\infty[^2 \quad x\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 10 ☆☆ *Mines-Télécom*

On considère
$f : (x,y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan(\dfrac{x+y}{1-xy})$.

1. Ensemble de définition D_f ?
2. Continuité ?
3. Existence de dérivées partielles ?
4. Justifier que les dérivées partielles sont nulles, qu'en déduire sur f?

Exercice 11 ☆☆ *CCINP PC*

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe C^2 et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$. 1) Trouver a, b des réels tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{1-t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x,y) = h(\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{ch}(y)})$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

Exercice 12 ☆☆ *CCINP PSI*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto x^3y^2(1-x-y)$

1) Déterminer les points critiques de f.

2) Sont-ce des extrema ?

Exercice 13 ☆☆ *CCINP PSI*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x,y) \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0, \ (x,y) \longmapsto 0$ sinon.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les dérivées partielles de f. Montrer qu'elles sont continues en $(0,0)$.

3) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Interpréter le résultat.

Exercice 14 ☆☆☆ *CCINP PSI*

On note f la fonction $(x,y) \mapsto x^2y + \ln(4+y^2)$.

a) Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^2$ un unique point critique.

b) On note $g : x \mapsto f(x,x^3) - f(0,0)$. Trouver un équivalent simple de g en 0.

c) f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 15 ☆☆☆ *CCINP PSI*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{cases}$

1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3) Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exercice 16

Soient $g = f \circ \varphi$, avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ (r,\alpha) \mapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$

1. Exprimer, pour $A \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}(A)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}(A)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial z}(A)$ à l'aide de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(A))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(A))$.
2. Application $f : (x,y) \mapsto \cos(xy)\ e^y$, $A = (1,2)$.

Exercice 17

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

via le changement de variable $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$

Exercice 18

En réalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Exercice 19

En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,

résoudre :
$(E) : x\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot) = 0.$

III. Pour aller plus loin

Exercice 20 ☆☆☆

Soit $F : t \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)}\text{d}x$.

1. Justifier que F est impaire et définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $f : (t,x) \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+\times]0,+\infty[$ Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, à l'aide de l'inégalité $|\text{Arctan}\, u| \leq u,\ \forall u > 0$.
3. Justifier que $f : (t,x) \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+\times]0,+\infty[$ et que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que : $F'(t) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t}, \forall t > 0$
4. En déduire l'expression de F.
5. En déduire la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan}\, x}{x}\right)^2 \text{d}x$; on pourra montrer que $K = 2F(1)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 21

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$, on cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de A vers $\mathbb{R}$ telles que pour tout (x,y) de A, l'équation aux dérivées partielles suivante soit vérifiée :

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot) = 0.$$

a) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, vérifier que $\varphi : A \to \mathbb{R}$, définie par :
$\varphi(x,y) = g(y/x)$ est solution de (E) ;
b) Démontrer que si f vérifie (E) alors $f(u,uv)$ ne dépend que de v ;
c) conclure.

Exercice 22 *Mines Ponts* ☆☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 23 *CCINP* ☆☆

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \text{ch}(2x) - \cos(2y)$.

On considère les ensembles $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2 < 1\}$.

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\text{sh}(t) \geq t$.
2. Montrer que f admet un minimum nul sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D.
4. Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D'.
5. En déduire qu'il existe $t_0 \in [0,\pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0),\sin(t_0))$.
6. Étudier les variations sur $[0,\pi/2]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Conclure.

Exercice 24 *Equation des cordes vibrantes*

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (E)$

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.

On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue $u : \begin{array}{ll} [0,L]\times\mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto u(x,t) \end{array}$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec conditions initiales $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

1) En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = y + s \\ t = \dfrac{-y}{c} + \dfrac{s}{c} \end{cases}$

montrer que $v : (y,s) \mapsto u\left(y+s, \dfrac{-y}{c} + \dfrac{s}{c}\right)$ vérifie l'EDP : $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$

2) En déduire qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que v soit de la forme
$v : (y,s) \mapsto g(2y) + h(2s)$

3) En déduire que u est de la forme

$$u : (x,t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$$

Exercice 25 *un problème d'optimisation*

Un industriel souhaite produire une boîte de chocolat cylindrique à base triangulaire équilatérale de volume V donné tout en minimisant la quantité de carton employé. Déterminer la longueur du côté ℓ de la base et la hauteur h d'une telle boîte.

Exercice 26

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_\star^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 27 *Mines*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 28 *Modélisation par moindres carrés*

Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i, y_i))_{1\le i\le n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i + b))_{1\le i\le n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2$ réalise le minimum de la fonction $(a,b) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|^2$.

2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme

$$(\star) \quad \|MV - Y\|_2^2$$

avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

3. Que dire du projeté orthogonal $\hat{Y}$ de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Im}(M)$? Etablir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1}\ M^T\ Y$.

4. Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée

5. En déduire que l'équation de la droite des moindres carrées et obtenue pour des paramètres $\hat{a}$ et $\hat{b}$ que l'on explicitera en fonction des (x_i, y_i)

Exercice 29

On suppose que $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, que $A \in \mathbb{R}^2$ et que $g(A) \neq 0$. Donner les formules pour

$\nabla(fg)(A); \quad \nabla(f+g)(A); \quad \nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)(A).$

Problème 1 *objectif* $e3a$-CCP

Cet exercice a pour but d'étudier les extrémums d'une fonction liée à une matrice symétrique.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $<\ ,\ >$, dont la norme associée estnotée $\|\ \|$.

1. *Etude d'un exemple.*
   (a) Vérifier les inégalités $xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ et $-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$ pour tous réels x et y et préciser, dans chaque cas, le cas d'égalité.
   (b) En déduire que $-\dfrac{1}{2}$ est un minorant de la fonction
   $$r : (x,y,z) \longmapsto \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$
   sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, et montrer que c'est son minimum.
   (c) Trouver de même le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
   (d) Comparer ce minimum et ce maximum à la plus grande et à la plus petite valeur propre de la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. *Etude du cas général.*
   Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On rappelle qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ de vecteurs propres pour f, chacun des vecteurs $\overrightarrow{u_k}$ étant associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Quel est le nom du résultat de cours utilisé ci-dessus ?
   On suppose dans la suite de cette partie que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (b) Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, que l'on écrit
   $$\overrightarrow{w} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + a_3\overrightarrow{u_3}$$
   dans la base $\mathcal{B}_0$. Vérifier que
   $$\frac{< f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w} >}{\|\overrightarrow{w}\|^2} = \lambda_3 + \frac{a_1^2(\lambda_1-\lambda_3)}{\|\overrightarrow{w}\|^2} + \frac{a_2^2(\lambda_2-\lambda_3)}{\|\overrightarrow{w}\|^2}$$
   (c) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction
   $$r_f : \overrightarrow{w} \longmapsto \frac{< f(\overrightarrow{w}), \overrightarrow{w} >}{\|\overrightarrow{w}\|^2}$$
   sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.
   (d) Déterminer de même le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.
   (e) Vérifier que l'on retrouve ainsi les résultats de la question 1.

3. *Une application.*

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et l'on note f son endomorphisme canoniquement associé.

(a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de f.

(b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et préciser les vecteurs en lesquels ils sont atteints.

(c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par $g(x,y,z) = \dfrac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}$ et P la partie de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ constituée des triplets (x,y,z) tels que $x+2y+2z=1$.

Soit $(x,y,z) \in P$. Vérifier que $g(x,y,z) = r_f(\overrightarrow{w})$.

(d) En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P, que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.

Notes

[1] correction : vrai, il suffit de transposer