

Méthodes à retenir :

- Avant de calculer des expressions de dérivées partielles, on justifie rapidement que les fonctions de 2 variables sont de classe C^1 en ce point, sinon il faut revenir aux limites de taux d'accroissements.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes. Lorsqu'elles existent, déterminer les dérivées partielles par rapport à x et à y de ces fonctions sur ces ensembles.

- 1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.
- 2) $g(x, y) = \ln(1 + xy)$.
- 3) $h(x, y) = x^{y^2+1}$.

Exercice 2

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$f(x, y) = x^2y^2 - y^4$, et $A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

- 1) Déterminer le gradient de f en A . En déduire les ex-

trema éventuels de f .

- 2) Déterminer la différentielle df_A de f en A .

Exercice 3

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x - y \quad (E)$$

Exercice 4

Déterminer les éventuels points critiques des fonctions suivantes :

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \operatorname{ch}(xy)$.
- 2) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x^4 - 2y^2$.

II. Exercices

Exercice 5 ☆☆ CCINP PC

- 1) Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x \exp(\frac{1}{x}) + \exp(x)$. Montrer que g est croissante et calculer $g(-1)$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \exp(y) + y \exp(x)$. Montrer que si (x_0, y_0) est un point critique, alors $x_0 < 0$ et $x_0 y_0 = 1$ et $g(x_0) = 0$. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
- 3) Soit $x \rightarrow f(-1 + ax, -1 + x)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2.
- 4) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.
- 5) Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur D en justifiant leur existence.

Exercice 6 ☆☆ Mines-Télécom

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variable $u = 2x - 3y, v = x + y$.

Exercice 7 ☆☆ ESIEE

Déterminer les fonctions Ψ de classe C^1 de $]0, +\infty[^2$ dans \mathbb{R} vérifiant $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 \quad x\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) +$

$$y\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exercice 8 ☆☆ Mines-Télécom

On considère

$$f : (x, y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

1. Ensemble de définition D_f ?
2. Continuité ?
3. Existence de dérivées partielles ?
4. Justifier que les dérivées partielles sont nulles, qu'en déduire sur f ?

Exercice 9 ☆☆☆ CCINP PC

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe C^2 et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$. 1) Trouver a, b des réels tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x, y) = h\left(\frac{\cos(x)}{\text{ch}(y)}\right)$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

Exercice 10 ☆☆☆ CCINP PSI

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto x^3 y^2 (1 - x - y)$

- Déterminer les points critiques de f .
- Sont-ce des extrema ?

Exercice 11 ☆☆☆ CCINP PSI

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0, (x, y) \mapsto 0$ sinon.

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- Calculer les dérivées partielles de f . Montrer qu'elles sont continues en $(0, 0)$.
- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Interpréter le résultat.

Exercice 12 ☆☆☆ CCINP PSI

On note f la fonction $(x, y) \mapsto x^2 y + \ln(4 + y^2)$.

- Montrer que f admet sur \mathbb{R}^2 un unique point critique.
- On note $g : x \mapsto f(x, x^3) - f(0, 0)$. Trouver un équivalent simple de g en 0.
- f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 13 ☆☆☆ CCINP PSI

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$

- Étudier la continuité de f sur \mathbb{R}^2 .
- f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?
- Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exercice 14

Soient $g = f \circ \varphi$, avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$

- Exprimer, pour $A \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial r}(A), \frac{\partial g}{\partial \alpha}(A)$ et $\frac{\partial g}{\partial z}(A)$ à l'aide de $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(A))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(A))$.
- Application $f : (x, y) \mapsto \cos(xy) e^y, A = (1, 2)$.

Exercice 15

Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

via le changement de variable $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$

Exercice 16

En réalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 17

En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ résoudre :
(E) : $x \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \cdot) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot) = 0$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 18 ☆☆☆

Soit $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)} dx$.

- Justifier que F est impaire et définie sur \mathbb{R} .
- Justifier que $f : (t, x) \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)}$ est de classe \mathcal{C}^0 sur $\mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$ [Montrer que F est continue sur \mathbb{R} , à l'aide de l'inégalité $|\text{Arctan } u| \leq u, \forall u > 0$.
- Justifier que $f : (t, x) \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$ et que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$. En déduire que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que : $F'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t}, \forall t > 0$
- En déduire l'expression de F .
- En déduire la valeur de $K = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan } x}{x} \right)^2 dx$; on pourra montrer que $K = 2F(1)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 19

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, on cherche les fonctions f de classe \mathcal{C}^1 de A vers \mathbb{R} telles que pour tout (x, y) de A , l'équation aux dérivées partielles suivante soit vérifiée :

$$(E) : x \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \cdot) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot) = 0.$$

- Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifier que $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, définie par : $\varphi(x, y) = g(y/x)$ est solution de (E) ;
- Démontrer que si f vérifie (E) alors $f(u, uv)$ ne dépend que de v ;
- conclure.

Exercice 20 Mines Ponts ☆☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 21 CCINP ☆☆

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \text{ch}(2x) - \cos(2y)$.

On considère les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$.

- Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\text{sh}(t) \geq t$.
- Montrer que f admet un minimum nul sur \mathbb{R}^2 .
- Montrer que D est fermé et borné. En déduire que f admet un maximum sur D .
- Montrer que D' est un ouvert et déterminer les points critiques de f dans D' .
- En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.
- Étudier les variations sur $[0, \pi/2]$ de la fonction $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Conclure.

Exercice 22 Equation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (E)$$

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.

On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue $u : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 avec conditions initiales $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

1) En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = y + s \\ t = \frac{-y}{c} + \frac{s}{c} \end{cases}$$

montrer que $v : (y, s) \mapsto u\left(y + s, \frac{-y}{c} + \frac{s}{c}\right)$ vérifie

$$\text{l'EDP : } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$$

2) En déduire qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que v soit de la forme

$$v : (y, s) \mapsto g(2y) + h(2s)$$

3) En déduire que u est de la forme

$$u : (x, t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$$

Exercice 23 un problème d'optimisation

Un industriel souhaite produire une boîte de chocolat cylindrique à base triangulaire équilatérale de volume V donné tout en minimisant la quantité de carton employé. Déterminer la longueur du côté ℓ de la base et la hauteur h d'une telle boîte.

Exercice 24

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 25 Mines

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 26 Modélisation par moindres carrés

Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i + b))_{1 \leq i \leq n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que

$$\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2 \text{ réalise le minimum}$$

$$\text{de la fonction } (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|^2.$$

2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme

$$(\star) \quad \|MV - Y\|_2^2$$

avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

3. Que dire du projeté orthogonal \hat{Y} de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\text{Im}(M)$? Etablir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1} M^T Y$.
4. Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée
5. En déduire que l'équation de la droite des moindres carrés et obtenue pour des paramètres \hat{a} et \hat{b} que l'on explicitera en fonction des (x_i, y_i)

Exercice 27

On suppose que $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, que $A \in \mathbb{R}^2$ et que $g(A) \neq 0$. Donner les formules pour

$$\nabla(fg)(A); \quad \nabla(f+g)(A); \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(A).$$

Problème 1 *objectif e3a-CCP*

Cet exercice a pour but d'étudier les extrémums d'une fonction liée à une matrice symétrique.

L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

1. *Etude d'un exemple.*

(a) Vérifier les inégalités $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ et $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq xy$ pour tous réels x et y et préciser, dans chaque cas, le cas d'égalité.

(b) En déduire que $-\frac{1}{2}$ est un minorant de la fonction

$$r : (x, y, z) \mapsto \frac{xy + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, et montrer que c'est son minimum.

(c) Trouver de même le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

(d) Comparer ce minimum et ce maximum à la plus grande et à la plus petite valeur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Etude du cas général.*

Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M . On rappelle qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de vecteurs propres pour f , chacun des vecteurs \vec{u}_k étant associé à la valeur propre λ_k .

(a) Quel est le nom du résultat de cours utilisé ci-dessus ?

On suppose dans la suite de cette partie que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(b) Soit \vec{w} un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 , que l'on écrit

$$\vec{w} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$

dans la base \mathcal{B}_0 . Vérifier que

$$\frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} = \lambda_3 + \frac{a_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2} + \frac{a_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2}$$

(c) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction

$$r_f : \vec{w} \mapsto \frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(d) Déterminer de même le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(e) Vérifier que l'on retrouve ainsi les résultats de la question 1.

3. Une application.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et l'on note f son endomorphisme canoniquement associé.

- (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de f .
- (b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ et préciser les vecteurs en lesquels ils sont atteints.
- (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par $g(x, y, z) = \frac{-x + y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2}$ et P la partie de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ constituée des triplets (x, y, z) tels que $x + 2y + 2z = 1$.
Soit $(x, y, z) \in P$. Vérifier que $g(x, y, z) = r_f(\vec{w})$.
- (d) En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P , que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.

Notes

¹ correction : vrai, il suffit de transposer