Méthodes à retenir :

- Le cours de première année permet de primitiver certaines fonctions (I.P.P., changement de variables, dérivées de fonctions composées, linéarisation, complexes,...), ce qui peut permettre de trouver la nature de certaines intégrales généralisées.
- Pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, commencer par mentionner la continuité de la fonction, puis examiner l'intégrabilité par comparaison (via des équivalents ou des majorations de valeurs absolues) aux bornes ouvertes infinies ou finies de l'ensemble de continuité.
- Pour calculer la valeur d'une intégrale généralisée convergente : essayer avec les primitives usuelles, ou par changement de variables, ou par intégration par parties, ou plus tard à l'aide d'une interversion série-intégrale
- Il faut connaître la nature des intégrales de Riemann $\int_0^1 t^a \, \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^b \, \mathrm{d}t$, et savoir écrire $\frac{1}{t^c} = t^{-c}$

I. Primitives et intégrales généralisées

Exercice 1 ☆

Justifier que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2 ☆

En remarquant que $f : t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{t}$ est de la forme $u'(t)u(t)^2$, donner l'expression d'une primitive F de f sur $]0,+\infty[$, puis en déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 3 ☆☆

En remarquant que $r : t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la partie réelle d'une fonction à valeurs complexes c dont on sait calculer une primitive C sur $\mathbb{R}$, en déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 4 ☆

En remarquant que $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, calculer $\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t$

Exercice 5 ☆

1. Etudier l'existence (c.à.d. la convergence de l'intégrale généralisée) de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$?
2. Après avoir remarqué que $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, en déduire la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 6 ☆☆

Justifier l'existence puis calculer $\int_0^{+\infty} t \, e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

II. Existence d'intégrales impropres

Exercice 7 ☆☆ *Continuité et théorèmes de comparaisons aux bornes impropres*

Après avoir déterminer l'ensemble de continuité de la fonction dont l'expression apparaît sous le signe intégral, puis les bornes impropres, justifier l'existence des intégrales généralisées suivantes :

1. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à* $t^{-3/2}$ *en* $+\infty$
2. $J = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à* $t^{-1/2}$ *en* 0

Exercice 8 *Intégrales généralisées convergentes*

Soit $K = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{-\ln t}}\mathrm{d}t$;

A l'aide du changement de variable $t = 1-u$, montrer que K converge, en comparer à $u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ lorsque $t \to 1$.

Exercice 9 ☆☆

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
2. En déduire l'existence d'une limite lorsque $X \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{-X}^{X} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 10 ☆☆

Soit $h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ t^{-1/2} & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ t^{-2} & \text{si} \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$

1. Justifier que h est continue (donc par morceaux) sur $]0,+\infty[$
2. Justifier que h n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

III. A savoir rédiger

Exercice 11 ☆☆

Etudier l'intégrabilité sur $I =]0,+\infty[$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$;

Exercice 12 ☆☆

A l'aide du changement de variable affine $u = 1-t$, étudier la nature de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\mathrm{d}t$ et de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t$

Exercice 13 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

Exercice 14 ☆☆

A l'aide d'une intégration par parties, justifiez que pour $a > 1$, l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a}\mathrm{d}t$ converge.

IV. Exercices

Exercice 15 ☆☆☆ *Sommes de Riemann*

Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N+k^2/N}$

Exercice 16 ☆☆☆ *CDV*

On considère l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$$

1. Quelle est la nature de I ?
2. Etudier la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $[1,+\infty[$.
3. A l'aide du changement de variables $u = \sqrt{1+x^2}$, montrer que $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$
4. En déduire la valeur de I, en remarquant que $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)$

Exercice 17 ☆☆

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2+x^3}$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0. En déduire que f est intégrable au voisinage de 0.
3. Dominer f au voisinage de $+\infty$ par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.
4. Conclure que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

V. Pour aller plus loin

Exercice 18 ☆☆☆ *Intégrales « de Bertrand »(HP)*

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

1. Pour $\alpha > 1$, remarquer que $1 < \dfrac{1+\alpha}{2} < \alpha$, puis justifier que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$. Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$
2. Pour $\alpha < 1$, remarquer que $1 > \dfrac{1+\alpha}{2} > \alpha$, puis justifier qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$
3. Pour $\alpha = 1$, montrer que $f_{1,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$. *(on pourra faire un changement de variable)*

Exercice 19 ☆☆☆ *intégrale "semi-convergente"*

1. Montrer que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t$.
2. On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

   On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\psi\ :\ x \mapsto \psi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\, dt$.
Montrer que l'on a :
$\forall x > 1,\ \psi(x) = \cos(1) - \dfrac{\cos(x)}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt.$

2.3. Prouver que $\psi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Exercice 20 ☆☆☆ *intégrale "semi-convergente"*

Montrer que les suites $(u_N) = \left(\displaystyle\int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right)$ et $(v_N) = \left(\displaystyle\int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t\right)$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir les inégalités

$$u_N \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$$

pour tout $x \in [2N\pi, (2N+1)\pi[$ et

$$u_{N+1} \leq \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$$

pour tout $x \in [(2N+1)\pi, (2N+2)\pi[$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge (semi-convergence).

Exercice 21 ☆☆☆

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x) \mathrm{d}x$.

Exercice 22 ☆☆☆☆

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = 0 = \lim\limits_{-\infty} f'$, prouver que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ en utilisant une intégration par parties.

Exercice 23 ☆☆☆

Vérifier que $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0\mathcal{L}^2(I, \mathbb{R})$, pour I intervalle réel.

Exercice 24 ☆☆☆☆ *Centrale PC 2016*

Soit $f\ :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge, et dans ce cas, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 f$

Notes

[1] correction : prolongement par continuité ;

[6] correction : on primitive en $-1/2e^{-t^2}$

[9] correction : $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et par croissance comparée, $f(t) \underset{x\to+infty}{=} O(t^{-2})$ donc par comparaison, f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f$ existe et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

On remarque ensuite que sur $\mathbb{R}^-$ le changement de variable $u=-t$ permet de se ramener à l'intégrale précédente.

[10] correction : il ne peut y avoir continuité par morceaux sur $[-1,1]$, car toute subdivision en 0 donne une fonction sans prolongement par continuité en 0^+.

[21] correction :

$$I = \int_0^\pi \ln(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x = \pi\ln 2 + \int_0^\pi \ln(\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln(\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x = \pi\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$$

Donc $I = \pi\ln 2 + 2I$ car $2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ via le cdv $u=\pi-x$ sur $[\pi/2,\pi]$ après découpage, et via le cdv $\pi/2-x=s$ on a $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln(\cos x)\mathrm{d}x$ D'où $I=-\pi\ln 2$

[24] correction :

Pour $k\geq 2$ et $t \in \left]\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, on a $f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq f(t)\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$, donc $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$