Méthodes à retenir :

- Pour une intégrale à paramètre, identifiez la variable muette (derrière le symbole d de l'intégrale), et la variable externe, dont le résultat intégré dépend.
- Révisez le chapitre sur les intégrales généralisées : toutes les hypothèses de domination le sont par des fonctions intégrables !

I. Applications directes du cours

I.1 Ensemble de définition

Exercice 1 ☆

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer l'ensemble de définition de F.

I.2 Continuité et $\displaystyle\int$

a) Théorème de continuité sous le signe intégral

Exercice 2 ☆☆

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f_x :]0,1] \to \mathbb{R},\ \ln(1+t^x)$.

Soit $F : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\mathrm{d}t$

1. Montrer que $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$.
2. En déduire que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Utilisation de majorations

Exercice 3 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$F : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et tend vers 0 en $+\infty$.

I.3 Interversion $\displaystyle\int$ et D

a) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un segment

Exercice 4 ☆☆

Montrer que la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{xt}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de sa dérivée.

b) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un intervalle quelconque

Exercice 5 ☆☆

Justifier que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6 ☆☆☆

Déterminer l'ensemble maximal (pour l'inclusion) Δ tel que $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx}\ \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ est définie, continue et dérivable sur Δ.

I.4 Dérivation d'une intégrale dont les bornes dépendent d'un paramètre

Exercice 7 ☆☆

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. En notant, pour $x > 0$, $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et F une primitive de f, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F(2x)$ et $F(3x)$.
2. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer sa dérivée.

II. A savoir rédiger

Exercice 8 ☆☆

Justifier que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-tx} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9 ☆☆☆

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, dt$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Etudier la dérivabilité de F sur D, et calculer $F'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer une expression de F.

III. Exercices

Exercice 10 ☆☆☆ *Mines-Télecom*

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2} e^{-t}\, dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin u| \leqslant |u|$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer F''.
5. Déterminer la fonction F.

Exercice 11 ☆☆☆

Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}$, puis tracer sa courbe représentative C_f.
On pourra montrer que pour tout $x > 0$,
$0 < f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x+x^3}}$.

Exercice 12 ☆☆☆

Soit $F : x \longmapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Avec le changeemnt de variable $t = u^2$, calculer $F(1/2)$.
3. En déduire $F(3/2)$.

Exercice 13 ☆☆☆☆ *la fonction Gamma*

On considère la fonction
$\Gamma :]0, +\infty[,\ x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$

1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.
2) Calculer $\Gamma(1)$.
3) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad (\star)$.
4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
5) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Gamma^{(2)}$.
6) Montrer que Γ' est croissante sur $]0, +\infty[$.
7) A l'aide de $(\star)$, montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
8) Calculer la limite du quotient $\frac{\Gamma(x)}{x}$, lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

On pourra remarquer que Γ est minorée par $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$, et que $\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)}{x}$, pour $x > 2$.

9.a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,n],\ 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

9.b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

9.c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆

Pour tout réel positif x, on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que f est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
2. Montrer que g est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
3. Montrer que : $\forall x \geq 0,\ f'(x) + g'(x) = 0$.
4. En déduire que : $\forall x \geq 0,\ f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ existe.
7. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 15 ☆☆☆ *Transformée de Laplace du sinus cardinal*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
2. En remarquant que
   $|\sin t| \geq \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2t)),\ \forall t \in \mathbb{R}$,
   montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\,dt$.
   Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ |\varphi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$.
   (c) En déduire que $\forall x > 0,\ |\varphi(x)| = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$

Exercice 16 ☆☆☆☆ *absence de domination*

Soient $A = [0, +\infty[$, $I = [0, +\infty[$, et
$F : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto x\, e^{-xt}$. Montrer que :
1) pour tout $t \in I$, $\varphi_t : x \mapsto F(x,t)$ est continue.
2) pour tout $x \in A$, $\psi_x : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux.
3) pour tout $x \in A$, ψ_x est intégrable sur I.
4) $f : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_I F(x,t)dt$ n'est pas continue sur A.

Exercice 17 ☆☆☆

On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^x}$.
1) Etudier le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2) Montrer que f est décroissante sur $\mathcal{D}$.
3) Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
4) Donner une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, pour $x \in \mathcal{D}$.
5) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 ☆☆☆☆ *Centrale*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,dt$.
1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = \dfrac{k\pi}{n}$.
i) Montrer que $(x+1)\cdot\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 - 2x\cos a_k + x^2) = (x-1)(x^{2n}-1)$.
ii) Calculer f à l'aide d'une somme de Riemann.
3) Calculer $f(1)$.

Notes

[1] correction : vrai, il suffit de transposer