Méthodes à retenir :

- Pour une intégrale à paramètre, identifiez la variable muette (derrière le symbole d de l'intégrale), et la variable externe, dont le résultat intégré dépend.
- Révisez le chapitre sur les intégrales généralisées : toutes les hypothèses de domination le sont par des fonctions intégrables !

I. Applications directes du cours

I.1 Ensemble de définition

Exercice 1 ☆

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer l'ensemble de définition de F.

I.2 Continuité et $\displaystyle\int$

a) Théorème de continuité sous le signe intégral

Exercice 2 ☆☆

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f_x :]0,1] \to \mathbb{R},\ \ln(1+t^x)$.

Soit $F : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\mathrm{d}t$

1. Montrer que $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$.
2. En déduire que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Utilisation de majorations

Exercice 3 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $F : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et tend vers 0 en $+\infty$.

I.3 Interversion $\displaystyle\int$ et D

a) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un segment

Exercice 4 ☆☆

Montrer que la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xt}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de sa dérivée.

b) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un intervalle quelconque

Exercice 5 ☆☆

Justifier que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6 ☆☆☆

Déterminer l'ensemble maximal (pour l'inclusion) Δ tel que $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie, continue et dérivable sur Δ.

I.4 Dérivation d'une intégrale dont les bornes dépendent d'un paramètre

Exercice 7 ☆☆

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. En notant, pour $x>0$, $f : t \mapsto e^{-t^2}$ et F une primitive de f, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F(2x)$ et $F(3x)$.
2. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer sa dérivée.

II. A savoir rédiger

Exercice 8 ☆☆

Justifier que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9 ☆☆☆

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} \mathrm{d}t$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Etudier la dérivabilité de F sur D, et calculer $F'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer une expression de F.

III. Exercices

Exercice 10 ☆☆☆

Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+t^3}}$, puis tracer sa courbe représentative C_f.
On pourra montrer que pour tout $x > 0$,
$0 < f(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{x+x^3}}$.

Exercice 11 ☆☆☆

Soit $F : x \longmapsto \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Avec le changeemnt de variable $t = u^2$, calculer $F(1/2)$.
3. En déduire $F(3/2)$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 12 ☆☆☆☆ *la fonction Gamma*

On considère la fonction
$\Gamma :]0, +\infty[, \ x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$
1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.
2) Calculer $\Gamma(1)$.
3) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad (\star)$.
4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
5) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Gamma^{(2)}$.
6) Montrer que Γ' est croissante sur $]0, +\infty[$.
7) A l'aide de $(\star)$, montrer que $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
8) Calculer la limite du quotient $\dfrac{\Gamma(x)}{x}$, lorsque $x \longrightarrow +\infty$.On pourra remarquer que Γ est minorée par $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$, et que $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)}{x}$, pour $x > 2$.

Exercice 13 ☆☆☆

Pour tout réel positif x, on pose :
$f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
2. Montrer que g est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) + g'(x) = 0$.
4. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ existe.
7. Conclure que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 14 ☆☆☆ *Transformée de Laplace du sinus cardinal*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
2. En remarquant que $|\sin t| \geq \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t)),\ \forall t \in \mathbb{R}$, montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ |\varphi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$.
   (c) En déduire que $\forall x > 0,\ |\varphi(x)| = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$

Exercice 15 ☆☆☆☆ *absence de domination*

Soient $A = [0,+\infty[$, $I = [0,+\infty[$, et $F : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto x\,\mathrm{e}^{-xt}$. Montrer que :
1) pour tout $t \in I$, $\varphi_t : x \mapsto F(x,t)$ est continue.
2) pour tout $x \in A$, $\psi_x : t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux.
3) pour tout $x \in A$, ψ_x est intégrable sur I.
4) $f : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_I F(x,t)\mathrm{d}t$ n'est pas continue sur A.

Exercice 16 ☆☆☆

On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^x}$.
1) Etudier le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2) Montrer que f est décroissante sur $\mathcal{D}$.
3) Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
4) Donner une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, pour $x \in \mathcal{D}$.
5) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Notes

[1] correction : vrai, il suffit de transposer