Méthodes à retenir :

- Pour une intégrale à paramètre, identifiez la variable muette (derrière le symbole d de l'intégrale), et la variable externe, dont le résultat intégré dépend.
- Révisez le chapitre sur les intégrales généralisées : toutes les hypothèses de domination le sont par des fonctions intégrables !

I. Applications directes du cours

I.1 Ensemble de définition

Exercice 1 ☆☆

Déterminer l'ensemble de définition de

$$f : x \longmapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

I.2 Continuité et $\displaystyle\int$

a) Théorème de continuité sous le signe intégral

Exercice 2 ☆☆

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f_x :]0,1] \to \mathbb{R},\ \ln(1+t^x)$.

Soit $F : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\mathrm{d}t$

1. Montrer que $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$.
2. En déduire que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Utilisation de majorations

Exercice 3 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $F : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et tend vers 0 en $+\infty$.

I.3 Interversion $\displaystyle\int$ et D

a) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un segment

Exercice 4 ☆☆☆

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\mathrm{d}t$.

Montrer que f est décroissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

b) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un intervalle quelconque

Exercice 5 ☆☆

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 6

Justifier que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

I.4 Dérivation d'une intégrale dont les bornes dépendent d'un paramètre

Exercice 7 ☆☆

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. En notant, pour $x > 0$, $f : t \mapsto e^{-t^2}$ et F une primitive de f, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F(2x)$ et $F(3x)$.
2. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer sa dérivée.

Exercice 8 ☆☆☆

Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}$, puis tracer sa courbe représentative C_f.
On pourra montrer que pour tout $x > 0$, $0 < f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x+x^3}}$.

II. A savoir rédiger

Exercice 9 ☆☆☆

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \, dt$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Etudier la dérivabilité de F sur D, et calculer $F'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer une expression de F.

III. Exercices

Exercice 10 ☆☆☆ *Mines-Télécom*

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} g(xt)e^{-x^2t}dt$. Soit g une fonction bornée impaire et continue.

1. Etude de la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ en fonction du réel α.
2. (a) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$.
   (b) Quelle est la parité de F ?
3. (a) Enoncer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
   (b) F est-elle continue sur $\mathbf{R}$?
4. (a) On pose $g = \sin$.
   (b) Calculer F
   (c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 11 ☆☆☆ *CC-INP PC*

Soit $f(x) = \int_0^1 t^x e^{2t} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. (a) Soit $x > -1$, montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{e^2}{x+1}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
   (b) Par une minoration de f, montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.
   (c) Montrer que f est de classe C^1 et donner f'.
   (d) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
   (e) De l'équivalent déduire α et β tels que $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 12 ☆☆☆ *CC-INP PC*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Préciser partie réelle et imaginaire de $\frac{1}{x+i}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2(x+i)}y = 0$.
3. On définit pour x réel, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.
   Montrer qu'on définit ainsi une fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f est continue.
4. Étudier le caractère C^1 et exprimer f'.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}f(x)$.
6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, on note $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}dt$. Montrer l'existence de I_α.
7. Exprimer I_α en fonction de f. En déduire le signe de I_α.

Exercice 13 ☆☆☆ *CC-INP MP*

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2} dt$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, ensemble de définition de F.
2. Calculer $F(1)$ (on pourra effectuer le changement de variable $u = \frac{1}{t}$).
3. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 14 ☆☆☆☆ *la fonction Gamma*

On considère la fonction

$\Gamma :]0,+\infty[, \ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.
2) Calculer $\Gamma(1)$.
3) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad (\star)$.
4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
5) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Gamma^{(2)}$.
6) Montrer que Γ' est croissante sur $]0,+\infty[$.
7) A l'aide de $(\star)$, montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
8) Calculer la limite du quotient $\dfrac{\Gamma(x)}{x}$, lorsque $x \longrightarrow +\infty$.On pourra remarquer que Γ est minorée par $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, et que $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)}{x}$, pour $x > 2$.

Exercice 15 ☆☆☆*CC-INP PSI*

Pour x réel on définit sous réserve d'existence $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

b) Quel est l'ensemble de définition de I ?

c) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

d) Calculer $I(x)$.

Exercice 16 ☆☆☆ *Transformée de Laplace du sinus cardinal*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
2. En remarquant que
   $|\sin t| \geq \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t)), \ \forall t \in \mathbb{R}$,
   montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0, \ \varphi'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0, \ |\varphi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$.
   (c) En déduire que :
   $\forall x > 0, \ |\varphi(x)| = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$

Exercice 17 ☆☆☆ ☆ *Mines-Ponts*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.
1) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
2) Calculer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Soit $g(x) = f(x^2)$.
3) Montrer que $g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$
4) En conclure que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Notes

[1] correction :