

Ordre des exercices : 1, 5, 6, 9, 16 ; 3, 12 ; 10, 15, 17 ; 20, 21, ; 7, 8, 11 ; 18 ; 33, 25, 27, 29,

Méthodes à retenir :

- Une base orthonormée d'un espace de dimension n , est caractérisée par : $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Etant donnée une base orthonormée $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a pour tous vecteurs : $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, et $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- Etant donnée une base orthonormée $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq s}$ de F s.e.v. de E , le projeté orthogonal sur F de tout vecteur x est donné par la formule : $p_F(x) = \sum_{i=1}^s \langle x | u_i \rangle u_i$
- Pour $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, P est inversible d'inverse $P^{-1} = P^T$ et les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Dans chacun des cas suivants, dites si l'expression proposée de $\langle x | y \rangle$, pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ appartenants à \mathbb{R}^2 défini un produit scalaire sur \mathbb{R}^n :

a) $\langle x | y \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$; b) $\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$;

Exercice 2 ☆

a) Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ par $(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En notant $\|\cdot\|$ la norme associée, calculer $\|1\|, \|X\|, \|X^2\|$.

Exercice 3 ☆

Vrai ou faux :

si P est une matrice orthogonale, alors P est inversible, et le calcul de P^{-1} ne nécessite aucun calcul (ni +, ni \times).

Exercice 4 ☆

Vrai ou faux :

si P est une matrice orthogonale, alors P^T est inversible ?

Exercice 5 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

II. A savoir rédiger

Exercice 6 ☆☆

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Étudier les cas d'égalités.

Exercice 7 ☆☆

Dans \mathbb{R}^3 soit

$$F = \{(x, y, z); x - y = 0\}.$$

Déterminer F^\perp et la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

Exercice 8 ☆☆

Caractériser l'endomorphisme de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

On pourra étudier si A est une matrice d'isométrie, directe ou non, et déterminer ses valeurs propres et sous-espaces propres.

III. Exercices

Exercice 9 ☆☆

soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien E et H l'orthogonal de $\{a\}$, déterminer la projection orthogonale de tout vecteur x de E sur $\mathbb{K}a$ et celle sur H en fonction de x , a et de leur produit scalaire, donner la distance de x à $\mathbb{K}a$ et celle de x à H .

(on pourra s'aider d'un dessin)

Exercice 10 ☆☆ CCP 2017

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 . 2. Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 11 ☆☆

Soit $\theta \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ et $M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

- Justifier que M_θ est la matrice d'une isométrie f_θ de \mathbb{R}^3 .
- Démontrer que f_θ possède une unique valeur propre réelle. On note D le sous-espace propre associé.
- A l'aide de la matrice M_θ , justifier que D et D^\perp sont stables par f_θ .
- Préciser la nature de la restriction g_θ de f_θ à D^\perp .

Exercice 12 ☆☆

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

- Pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, justifier que $N(V) = V^T \overline{V}$ est une matrice 1×1 contenant un réel positif.
- En calculant de deux manières $N(AV) = (AV)^T \overline{AV}$, pour V vecteur propre de A associé à une valeur propre λ , montrer que $|\lambda|^2 = 1$.
- En déduire que toute valeur propre de $AV^T \overline{V}$ est de module 1.
- Que dire des valeurs propres réelles de A ?

Exercice 13 ☆☆

Montrer que id_E est l'unique projecteur orthogonal de

E qui est un endomorphisme orthogonal de E .

Exercice 14 ☆☆

Soit $N \in \mathbb{N}$. Dans l'espace vectoriel préhilbertien réel $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, pour le produit scalaire usuel, justifier que la famille $(t \mapsto \cos(nt))_{0 \leq n \leq N}$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormale?

Exercice 15 ☆☆

On considère l'endomorphisme g canoniquement associé

à la matrice $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- Montrer que g est une isométrie.
- Vérifier que la droite D dirigée par $\vec{u}(2, 0, 1)$ est stable par g .
- Montrer que la restriction de g au plan D^\perp est une isométrie directe.

Exercice 16 ☆☆☆

Soit $E = \mathbb{R}_N[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N ;

- Démontrer que $(P; Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$;
- On note $P_n = X^n(1 - X)^n$ et $L_n(X) = [P_n]^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de P_n).

Pour $0 \leq i \leq j$ montrer que :

$\langle L_i | L_j \rangle = (-1)^i \int_0^1 P_i P_j^{(j+i)}$.

- Calculer $\langle L_n | L_n \rangle$.
- En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$

Exercice 17 ☆☆

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 12 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

- La suite de matrices $(M^n)_n$ converge t-elle?
- Soit $N = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$. Que représente N ?

- Déterminer N .
- Soit $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ telles que pour tout naturel n $X_{n+1} = MX_n$. La suite $(X_n)_n$ converge-t-elle? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 18 ★★★

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E , A une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

On étudie la fonction f de E dans \mathbb{R} qui à tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle - 2 \langle x, u \rangle$.

- Ici $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$. Montrer que $X_0 = (2, 1)$ est un point critique de f .

- Avec les conditions de la question 1 : soit $h = (h_1, h_2)$. Montrer que $f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0 .
- On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E , $\langle x, \varphi(x) \rangle > 0$. Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ , montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 22 ★★★

Calculer

$$d = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left\{ \int_0^{2\pi} (a \sin t + b \cos t - 1)^2 dt \right\}$$

Exercice 23 ★★★

Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que

Exercice 19 ☆☆☆ *Produit scalaire dans un e.v.e et matrices symétriques*

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ la norme associée, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Calculer $\langle e_i | e_j \rangle$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- Déterminer le réel $\langle x | y \rangle$.
- Déterminer la matrice 1×1 $X^T Y$.

On notera $(X|Y) = \langle x | y \rangle$ le produit scalaire correspondant sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $(AX|Y) = (X|AY)$.

Exercice 20 ☆☆☆

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, $(\lambda_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ ses s valeurs propres réelles distinctes, et $(d_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ les dimensions des sous-espaces-propres correspondants. Prouver que :

$$\text{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^2 = \sum_{\ell=1}^s d_\ell \lambda_\ell^2$$

Exercice 21 ☆☆☆

Caractériser l'endomorphisme de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

On pourra étudier si A est une matrice d'isométrie, directe ou non, et déterminer ses valeurs propres et sous-espaces propres.

x et y sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Exercice 24 ☆☆☆☆ *b.o.n.*

Soit E un espace euclidien de dimension n , prouver qu'il existe n vecteurs unitaires (u_1, u_2, \dots, u_n) tels que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j) \Rightarrow (\|u_i - u_j\| = 1)$;

calculer $(u_i|u_j)$ la famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est-elle une base de E ?

Exercice 25 ★★★

On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Vérifier que la droite D dirigée par $\vec{u}(0, 1, 1)$ est stable par f .
3. Montrer que la restriction de f au plan D^\perp est une rotation, dont on précisera l'angle.

Exercice 26 ★★★★★

Soit E espace euclidien et u une isométrie de E euclidien, $v = id_E - u$.

1. Prouver que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(v)^\perp$. Dans la suite, on suppose que :
 $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.
2. Prouver que : $\forall x \in E, \|v(x)\| \leq \|x\|$;
3. Prouver que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - Id_E)$ et $\text{Im}(u - Id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .
4. Pour tous $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, soit
 $u_n(x) = \frac{1}{n} (x + u(x) + u^2(x) + \dots + u^{n-1}(x))$;
prouver que $(u_n(x))_n$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(u - Id_E)$.

Exercice 27 ★★★★★ *orthogonalité des s.e.p.*

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Justifier que si λ et μ sont deux valeurs propres complexes distinctes, alors $\lambda, \mu \in \mathbb{U}$. (en calculant $\|AV\|^2 = \overline{V^T A^T A V} = \overline{V^T V}$ pour un vecteur colonne (complexe) propre).
2. Justifier que pour deux telles valeurs propres distinctes λ et μ associées à deux vecteurs propres complexes V et W respectivement, on a $\overline{W^T V} = 0$

Exercice 28 ★★★

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Justifier que toute valeur propre de A est de module 1, en calculant $\|AV\|^2 = \overline{V^T A^T A V} = \overline{V^T V}$ pour un vecteur colonne (complexe) propre.

2. Justifier que A est trigonalisable sur \mathbb{C} .
3. Dédire des deux questions précédentes que A est diagonalisable sur \mathbb{C} . On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 29 ★★★★★

Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$, pour $n = 2$. On admet les résultats de l'exercice précédent.

1. Si (λ, v) est un couple propre de A , justifier que $(\bar{\lambda}, \bar{v})$ est un couple propre de A .
2. Dans le cas $n = 2$, montrer que A est semblable sur \mathbb{C} à une matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

ou $N_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

Si en outre $\det(A) = 1$, montrer que A est semblable sur \mathbb{R} à une matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

Si en outre $\det(A) = -1$, montrer que A est semblable sur \mathbb{R} à une matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

Exercice 30 ★★★★★

Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, pour $n = 3$. On admet les résultats des exercices précédents.

Montrer que A est semblable sur \mathbb{C} à $I_3, -I_3,$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou à une matrice $M_\theta =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$, ou à une matrice

$N_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

Exercice 31 ☆☆☆☆ *Utilisation d'une b.o.n.*

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

1. soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x) | f(y) \rangle = 0$;
prouver que $\exists k \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$
2. Soit φ un produit scalaire sur E tel que :
 $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.
Montrer que : $\exists \alpha > 0$; $\varphi(\cdot) = \alpha \langle \cdot | \cdot \rangle$.

Exercice 32 ☆☆☆

Les matrices à diagonale propre sont des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la diagonale est constituée de ses valeurs propres en respectant les ordres de multiplicité. On note ε_n l'ensemble des matrices à diagonale propre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre.
2. Soit A appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Est-ce que A est une matrice à diagonale propre ?
3. Soit A appartenant à ε_n antisymétrique. a) Donnez les valeurs propres de A . b) Montrez qu'il existe un $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$. c) Calculez $({}^tAA)^p$ et en remarquant que tAA est symétrique, montrez que $A = 0$.
4. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Soit F un sous-espace de ε_n , montrez que $\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 33 ☆☆☆☆ *Matrices définies positives*

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :
pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TAX \geq 0$.

1. Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique réelle et positive telle que $R^2 = U$.
2. Notons u et r les endomorphismes canoniquement associés à U et R .
 - (a) Justifier que u et r commutent.
 - (b) Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_{\lambda,u}$ désigne le s.e.p. de u associé à λ . Justifier que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_{\lambda,u}$ est stable par r .

- (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, la restriction $r|_{E_{\lambda,u}}$ de r à $E_{\lambda,u}$ est diagonalisable dans une base de vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{\lambda}$.
- (d) En déduire qu'il existe une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^n adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_{\lambda,u}$ dans laquelle u et r sont diagonales.
- (e) Soit P la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B}' .
Justifier que $P^{-1}UP$ et $P^{-1}RP$ sont diagonales.
- (f) En déduire qu'il existe une unique matrice R vérifiant $R^2 = U$.

Exercice 34 ☆☆☆☆

Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soient A et B deux matrices symétriques réelles, tels que $AB = BA$. Montrer que A et B sont diagonalisables dans une base orthonormée commune de vecteurs propres.

Exercice 35 ☆☆☆

En utilisant que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,
 $\theta : (A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire, prouver que pour toutes matrices symétriques A, B on a :
 $(\text{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \text{tr}(A^2) \cdot \text{tr}(B^2)$.

Exercice 36 *Modélisation par moindres carrés*

Étant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i + b))_{1 \leq i \leq n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que

$$\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2 \text{ réalise le minimum}$$

$$\text{de la fonction } (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|^2.$$

2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme

$$(\star) \quad \|MV - Y\|_2^2$$

avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

3. Que dire du projeté orthogonal \hat{Y} de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\text{Im}(M)$? Établir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1} M^T Y$.
4. Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée

Notes

³ correction : vrai, il suffit de transposer