Méthodes à retenir :

- Une base orthonormée d'un espace de dimension n, est caractérisée par : $<\overrightarrow{e_i}|\overrightarrow{e_j}>=\delta_i^j,\ \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]$.
- Etant donnée une base orthonormée $(\overrightarrow{e_i})_{1\leq i\leq n}$, on a pour tous vecteurs : $<\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_j$, et $\|\overrightarrow{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$
- Etant donnée une base orthonormée $(\overrightarrow{u_i})_{1\leq i\leq s}$ de F s.e.v. de E, le projeté orthogonal sur F de tout vecteur x est donné par la formule : $p_F(x)=\sum_{i=1}^{s}<x|u_i>u_i$
- Pour $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, P est inversible d'inverse $P^{-1}=P^T$ et les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Dans chacun des cas suivants, dites si l'expression proposée de $<x|y>$, pour tous vecteurs $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ appartenants à $\mathbb{R}^2$ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:
a) $<x|y>=x_1x_2+y_1y_2$; b) $<x|y>=x_1y_2+x_2y_1$;

Exercice 2 ☆

a) Vérifier que $<\cdot|\cdot>:\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ définie pour tous $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]$ par $(P|Q)=\int_0^1 t^2P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) En notant $\|\cdot\|$ la norme associée, calculer $\|1\|$, $\|X\|$, $\|X^2\|$.

Exercice 3 ☆

Vrai ou faux :
si P est une matrice orthogonale, alors P est inversible, et le calcul de P^{-1} ne nécessite aucun calcul (ni $+$, ni $\times$).

Exercice 4 ☆

Vrai ou faux :
si P est une matrice orthogonale, alors P^T est inversible ?

Exercice 5 ☆☆

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}(A^T\ B)$$

définit un produit scalaire sur $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

II. A savoir rédiger

Exercice 6 ☆☆

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\leq n\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

Étudier les cas d'égalités.

Exercice 7 ☆☆

Dans $\mathbb{R}^3$ soit
$F=\{(x,y,z);\ x+y+z=0\}$.
Déterminer $F^\perp$ et la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 8 ☆☆

Caractériser l' endomorphisme de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :
$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-6&2\\-6&-2&3\\2&3&6\end{pmatrix}$;

On pourra étudier si A est une matrice d'isométrie, directe ou non,et déterminer ses valeurs propres et sous-espaces propres.

III. Exercices

Exercice 9 ☆☆ *CC-INP*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall x \in E,\ (f(x)|x) = 0$.

1) Montrer que : $\forall x, y \in E,\ (f(x)|y) = -(x|f(y))$.
2) Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ et $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

Exercice 10 ☆☆ *CC-INP*

Soit E un espace euclidien. Soient a et b des vecteurs de E avec a et b non nuls. Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x - \langle a, x\rangle b \end{array}$

1) Montrer que : f bijective $\Leftrightarrow \langle a, b\rangle \neq 1$.
2) Dans le cas f bijective, calculer f^{-1}.

Exercice 11 ☆☆ *CC-INP*

Soit $M \in M_n(R)$ tel que $M^n = 0$.

1) Montrer que si M est symétrique, alors $M = 0_n$.

Exercice 12 ☆☆☆ *CC-INP*

E est un espace euclidien et a, b deux vecteurs de E orthogonaux entre eux.

1. Soit $\varphi : x \mapsto x + \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.
2. On se place dans un espace euclidien de dimension 3 et on se donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $a \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et $b \in \mathrm{Vect}(e_2)$. Préciser la matrice M de φ dans cette base.
3. Préciser les éléments propres de φ et déterminer $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$.
4. Généraliser l'étude à un espace de dimension n.

Exercice 13 ☆☆

soit v un vecteur non nul d'un espace euclidien E et H l'orthogonal de $\{v\}$, déterminer la projection orthogonale de tout vecteur x de E sur $D = \mathrm{Vect}(v)$ et celle sur H en fonction de x, v et de leur produit scalaire, donner la distance de x à D et celle de x à H.
(on pourra s'aider d'un dessin)

Exercice 14 ☆☆ *CCP 2017*

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2.
2. Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 15 ☆☆

Soit $\theta \in [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ et $M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Justifier que M_θ est la matrice d'une isométrie f_θ de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que f_θ possède une unique valeur propre réelle. On note D le sous-espace propre associé.
3. A l'aide de la matrice M_θ, justifier que D et $D^{\perp}$ sont stables par f_θ.
4. Préciser la nature de la restriction g_θ de f_θ à $D^{\perp}$.

Exercice 16 ☆☆

Montrer que id_E est l'unique projecteur orthogonal de E qui est un endomorphisme orthogonal de E.

Exercice 17 ☆☆

Soit $N \in \mathbb{N}$. Dans l'espace vectoriel préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, pour le produit scalaire usuel, justifier que la famille $(t \longmapsto \cos(nt))_{0 \leq n \leq N}$ est une famille orthogonale. Est-elle orthonormale ?

Exercice 18 ☆☆

On considère l'endomorphisme g canoniquement associé à la matrice $C = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que g est une isométrie.
2. Vérifier que la droite D dirigée par $\overrightarrow{u}(2, 0, 1)$ est stable par g.
3. Montrer que la restriction de g au plan $D^{\perp}$ est une isométrie directe.

Exercice 19 ☆☆

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

1. La suite de matrices $(M^n)_n$ converge t-elle ?
2. Soit $N = \lim\limits_{n \to \infty} M^n$. Que représente N ?
3. Déterminer N.
4. Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ telles que pour tout naturel n $X_{n+1} = MX_n$. La suite $(X_n)_n$ converge t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 20 ☆☆ ☆ *Produit scalaire dans un e.v.e et matrices symétriques*

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $< \ | \ >$, $\| \ \|$ la norme associée, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer $< e_i | e_j >$, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$.
2. Déterminer le réel $< x|y >$.
3. Déterminer la matrice 1×1 $X^T Y$.
   On notera $(X|Y) =< x|y >$ le produit scalaire correspondant sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
4. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, vérifier que $(AX|Y) = (X|AY)$.

Exercice 21 ☆☆☆

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle , $(\lambda_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ ses s valeurs propres réelles distinctes, et $(d_\ell)_{1 \leq \ell \leq s}$ les dimensions des sous-espaces-propres correspondants. Prouver que :

$$\mathrm{Tr}(S^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = \sum_{\ell=1}^{s} d_\ell \lambda_\ell^2$$

Exercice 22 ☆☆☆

On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Vérifier que la droite D dirigée par $\overrightarrow{u}(0, 1, 1)$ est stable par f.
3. Montrer que la restriction de f au plan $D^\perp$ est une rotation, dont on précisera l'angle.

Exercice 23

Caractériser les endomorphismes de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :

a) $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; b) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 24 ☆☆☆☆

Soit E espace euclidien et u une isométrie de E euclidien, $v = u - id_E$.

1. Prouver que $\mathrm{Ker}(v) = (\mathrm{Im}(v))^\perp$.
   En déduire que $\mathrm{Im}(v) = (\mathrm{Ker}(v))^\perp$.
   Remarquer que
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Pour tous $x \in E$ et $n \in N$, soit
   $u_n(x) = \frac{1}{n}\left(x + u(x) + u^2(x) + .. + u^{n-1}(x)\right)$;
   prouver que $(u_n(x))_n$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 25 ☆☆☆

Calculer

$$d = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left\{ \int_0^{2\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 \ \mathrm{d}t \right\}$$

Exercice 26 ☆☆☆ *orthogonalité des s.e.p.*
Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Justifier que si λ et μ sont deux valeurs propres complexes distinctes, alors $\lambda, \mu \in \mathbb{U}$. (en calculant $\|AV\|^2 = \overline{V^T A^T} AV = \overline{V^T} V$ pour un vecteur colonne (complexe) propre).
2. Justifier que pour deux telles valeurs propres distinctes λ et μ associées à deux vecteurs propres complexes V et W respectivement, on a $\overline{W^T} V = 0$

Exercice 27 ☆☆☆
Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Justifier que toute valeur propre de A est de module 1, en calculant $\|AV\|^2 = \overline{V^T A^T} AV = \overline{V^T} V$ pour un vecteur colonne (complexe) propre.
2. Justifier que A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. Déduire des deux questions précédentes que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 28 ☆☆☆
Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, justifier que $N(V) = V^T \overline{V}$ est une matrice 1×1 cintenant un réel positif.
2. Encalclant de deux manières $N(AV) = (AV)^T \overline{AV}$, pour V vecteur propre de A associé à une valeur propre λ, montrer que $|\lambda|^2 = 1$.
3. En déduire que toute valeur propre de $AV^T \overline{V}$ est de module 1.
4. Que dire des valeurs propres réelles de A ?

Exercice 29 ☆☆☆☆ *Matrices définies positives*
Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :
pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX \geq 0$.

1. Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique réelle et positive telle que $R^2 = U$.
2. Notons u et r les endomorphismes canoniquement associés à U et R.
   (a) Justifier que u et r commutent.
   (b) Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_{\lambda,u}$ désigne le s.e.p. de u associé à λ. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp} u)$, $E_{\lambda,u}$ est stable par r.
   (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp} u)$, la restriction $r_{|E_{\lambda,u}}$ de r à $E_{\lambda,u}$ est diagonalisable dans une base de vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{\lambda}$.
   (d) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} A)} E_{\lambda,u}$ dans laquelle u et r sont diagonales.
   (e) Soit P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$.
   Justifier que $P^{-1}UP$ et $P^{-1}RP$ sont diagonales.
   (f) En déduire qu'il existe une unique matrice R vérifiant $R^2 = U$.

Exercice 30 ☆☆☆☆
Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soient A et B deux matrices symétriques réelles, tels que $AB = BA$. Montrer que A et B sont diagonalisables dans une base orthonormée commune de vecteurs propres.

Exercice 31 ☆☆☆
En utilisant que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,
$\theta : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire, prouver que pour toutes matrices symétriques A, B on a :
$(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\,\mathrm{tr}(A^2).\,\mathrm{tr}(B^2)$.

Exercice 32 *Modélisation par moindres carrés*

Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i, y_i))_{1\leq i\leq n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i + b))_{1\leq i\leq n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2$ réalise le minimum de la fonction $(a, b) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|^2$.
2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme
$$(\star) \quad \|MV - Y\|_2^2$$
avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
3. Que dire du projeté orthogonal $\hat{Y}$ de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Im}(M)$? Etablir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1}\ A^T\ Y$.
4. Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée

Notes

[3] correction : vrai, il suffit de transposer

[24] correction :

1. On prouve une inclusion, puis égalité des dimensions.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$: $u(x) = x$.
   Donc pour tout $y = u(z) - z \in \mathrm{Im}(v)$, avec z antécédant de y par v, on a :
   $< x|z - u(z) >=< x|z > - < x|u(z) >=< u(x)|u(z) > - < u(x)|u(z) >= 0$ car u orthogonal et $x = u(x)$.
   Donc $\mathrm{Ker}(v) \subset (\mathrm{Im}(v))^{\perp}$.
   Par théorème du rang (dimension finie), $\dim(\mathrm{Ker}\, v) = \dim(E) - \mathrm{rg}(v) = \dim((\mathrm{Im}(v))^{\perp})$, d'où l'égalité.
   En passant à l'orthogonal, on a donc $\mathrm{Im}(v) = (\mathrm{Ker}(v))^{\perp}$.
2. Comme $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(v)^{\perp}$, par propriété de l'orthogonal en dimension finie.
   On a donc $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$
3. On décompose dans la somme directe $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(v)^{\perp}$
   Pour $x \in E$ il existe un unique couple $(a, b) \in \mathrm{Ker}(v) \times \mathrm{Ker}(v)$ tel que $x = a + b$
   Comme $u(x) = u(a) + u(b)$ et comme $a = u(a)$, on montre par récurrence que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(a) = a$.
   Par ailleurs, comme $b \in \mathrm{Im}(v)$, soit c tel que $b = v(c) = u(c) - c$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n(b) = u_n(u(c) - c) = \dfrac{1}{n}u^{n+1}(c) - \dfrac{1}{n}c$ par téléscopage. Comme u conserve la norme, $u_n(c) \longrightarrow 0$
   Donc $u_n(x) \longrightarrow a$, le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.