Ordre des exercices : 1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14

Méthodes à retenir :

- $G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X=n]\, t^n$ est définie sur $[-1,1]$ au moins.
- Si le rayon de convergence de la série génératrice G_X de X variable aléatoire est $R>1$, alors X admet des moments à tout ordre k , et $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)] = G''_X(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)(\dots)(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)$,

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆☆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires indépendantes de loi $b(p)$ pour $p \in]0,1[$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, On note (E_k) l'évènement " le premier succès lors de tirages successifs indépendants à pile ou face avec probabilité de succès p est obtenu au k-ième lancer".

Ecrire (E_k) à l'aide des symboles $\bigcap, \bigcup$ et des évènements $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 ☆

Déterminer la fonction de répartition et la série génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 3 ☆

On note S la somme de deux dés équilibrés.

1. Déterminer la loi de S.
2. Déterminer l'espérance de S.
3. Déterminer la variance de S.

II. A savoir rédiger

Exercice 4 ☆☆ *CCP PSI 2015*

Soit $a>0$. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}[X=n] = \frac{a}{n(n+1)}$$

.

1. Déterminer la valeur de a.
2. X admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Déterminer la série génératrice.

Exercice 5 ☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète, valeurs dans $\mathbb{N}$.

Justifier que si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ aussi, et que X admet une variance.

III. Exercices

Exercice 6 ☆

A partir la fonction génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 7 ☆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$ fixé.

Déterminer la loi de $2X$, son espérance et sa variance.

Exercice 8 ☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice 9 ☆☆

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

1) Déterminer les fonctions génératrices de X et $3Y$.

2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$.

3) En déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

4) X et Z sont-elles indépendantes ?

5) Trouver le minimum de la fonction
$t \mapsto \mathbb{V}(X + tY)$.

Exercice 10 ☆☆

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

Exercice 11 ☆☆☆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X \leq n] = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \, \mathrm{d}x$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 12 ☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
a) Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-r+1)]$ b) Retrouver ce résultat par les séries génératrices.

Exercice 13 ☆☆ *Casino*

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 euro sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

a) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête avec une probabilité égale à 1 (i.e. presque sûrement). Déterminer l'espérance de gain du joueur.
b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ euros ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 14 ☆☆

On s'intéresse aux nombres de clients arrivant à l'un des deux guichets (A et B) d'une banque. Pour cela modélisons le problème de la manière suivante : Le nombre de client quittant la file d'attente, noté X , est modélisé par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Le choix de guichet A par le i ème client est modélisé par une loi Bernoulli $b(p)$. Ainsi Y_i vaut 1 avec probabilité p si le $i$ème client choisit bien le guichet A et 0 avec probabilité $1-p$ sinon. On supposera de plus que toutes les variables (X_i, Y_i) sont indépendantes. Posons de plus $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{X} Y_k$.

1. Que représente S ?
2. Que vaut $\mathbf{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\})$?
3. Montrer que S suit une loi de Poisson.
4. En déduire $\mathbf{P}_{\{Y=k\}}(\{X=n\})$

Exercice 15 ☆☆☆ *estimateurs statistiques*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

On pose $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

a) Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.
b) Calculer l'espérance de $\bar{V}_n$.

Notes

[5] correction :

Oii, C.S. $\sum x_i p_i \leq \left(\sum \sqrt{p_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum x_i^2 \sqrt{p_i}^2\right)^{1/2}$