Méthodes à retenir :

- $G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X=n]\, t^n$ est définie sur $[-1,1]$ au moins.
- Si le rayon de convergence de la série génératrice G_X de X variable aléatoire est $R>1$, alors X admet des moments à tout ordre k , et $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)] = G_X''(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)(\dots)(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)$,

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆☆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires indépendantes de loi $b(p)$ pour $p\in]0,1[$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$ fixé, On note (E_k) l'évènement " le premier succès lors de tirages successifs indépendants à pile ou face avec probabilité de succès p est obtenu au k-ième lancer".

Ecrire (E_k) à l'aide des symboles $\bigcap, \bigcup$ et des évènements $\{X_i=1\}$ et $\{X_i=0\}$ pour $i\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2 ☆☆

Soit $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda>0$ fixé.

Déterminer la loi de X^2, son espérance et sa variance.

Exercice 3 ☆

Déterminer la fonction de répartition et la série génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 4 ☆

On note M le maximum obtenu sur les faces après un lancer de deux dés équilibrés.

1. Déterminer la loi de M.
2. Déterminer l'espérance de M.
3. Déterminer la variance de M.

II. A savoir rédiger

Exercice 5 ☆☆ *CCP PSI 2015*

Soit $a>0$. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}[X=n] = \frac{a}{n(n+1)}$$

.

1. Déterminer la valeur de a.
2. X admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Déterminer la série génératrice.

Exercice 6 ☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète, valeurs dans $\mathbb{N}$.

Justifier que si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ aussi, et que X admet une variance.

III. Exercices

Exercice 7 ✩✩ *Mines-Télécom*

1. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que leurs fonctions génératrices sont égales sur $[-1, 1]$. Montrer qu'elles suivent la même loi.

2. On considère n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $b(p)$. En passant par les fonctions génératrices, déterminer la loi de la somme de ces variables.

Exercice 8 ✩

A partir la fonction génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, déterminer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 9 ✩✩

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice 10 ✩✩

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

1) Déterminer les fonctions génératrices de X et $3Y$.
2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X+3Y$.
3) En déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.
4) X et Z sont-elles indépendantes ?
5) Trouver le minimum de la fonction

$t \mapsto \mathbb{V}(X + tY)$.

Exercice 11 ✩✩

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.

Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

Exercice 12 ✩✩✩

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X \leq n] = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^n \,\mathrm{d}x$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 13 ✩✩ *Mines-Télécom*

On considère $S(t) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.

2. Calculer $S(t)$ sur $]-R, R[$.

On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ ?

4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 14 ✩✩

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

a) Calculer

$$\mathbb{E}[X(X-1)\ldots(X-r+1)]$$

b) Retrouver ce résultat par les séries génératrices.

Exercice 15 ✩✩ *Casino*

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

- il mise initialement 1 euro sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

a) On suppose la fortune du joueur infinie.

Montrer que le jeu s'arrête avec une probabilité égale à 1 (i.e. presque sûrement). Déterminer l'espérance de gain du joueur.

b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.

Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ euros ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 16 ☆☆

On s'intéresse aux nombres de clients arrivant à l'un des deux guichets (A et B) d'une banque. Pour cela modélisons le problème de la manière suivante : Le nombre de client quittant la file d'attente, noté X , est modélisé par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Le choix de guichet A par le i ème client est modélisé par une loi Bernoulli $b(p)$. Ainsi Y_i vaut 1 avec probabilité p si le $i$ème client choisit bien le guichet A et 0 avec probabilité $1-p$ sinon. On supposera de plus que toutes les variables (X_i, Y_i) sont indépendantes. Posons de plus $S = \sum_{k=1}^{X} Y_k$.

1. Que représente S ?
2. Que vaut $\mathbf{P}_{\{X=n\}}(\{Y=k\})$?
3. Montrer que S suit une loi de Poisson.
4. En déduire $\mathbf{P}_{\{Y=k\}}(\{X=n\})$

Exercice 17 ☆☆☆ *estimateurs statistiques*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et

$\bar{V}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$

a) Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.
b) Calculer l'espérance de $\bar{V}_n$.

Exercice 18 ☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète, valeurs dans $\mathbb{R}$.

Supposons que $\mathbb{E}[X^2]$ existe, a-t-on $\mathbb{E}[X]$ existe ?

Exercice 19 ☆☆☆ *CC-INP MP*

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On considère les événements

P_k : obtenir Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer, et
F_k obtenir Face au $k^{\text{ième}}$ lancer.

On note $P(P_k) = p$ et $P(F_k) = q$.

On note L_1 le nombre de termes de la première série de lancers identiques, et L_2 le nombre de termes de la seconde série de lancers identiques. Par exemple pour la suite PPFFFFPF, alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 4$.

1. (a) Caractériser l'événement $(L_1 = k)$, puis déterminer $P(L_1 = k)$.
   (b) Déterminer $G_{L_1}(t)$ (où G_{L_1} est la fonction génératrice de la var L_1). Déterminer $E(L_1)$
   (c) Calculer $P(L_2 = \ell)$. L_1 et L_2 ont-elles la même loi ?
2. 2. On se place maintenant dans le cas de n lancers.
   (a) Calculer $P(L_1 = n)$ puis $P(L_1 = k)$
   (b) Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$
   (c) Calculer $E(L_1)$.

Exercice 20 ☆☆☆☆ *Générateur de loi de Poisson*

Expliquer pourquoi l'algorithme Python ci-dessous permet de générer une loi de Poisson de paramètre λ.

```
L=np.exp(-lambda)
k=0
p=1
while p>L:
    k=k+1
    u=rand() #nombre aléatoire entre 0 et 1
    p=p*u
return(k-1)
```

Notes

[1] correction :

[6] correction : $\sum np_n \leq \sum n^2 p_n$

[18] correction : Oii, C.S. $\sum x_i p_i \leq \left(\sum \sqrt{p_i}^2\right)^{1/2} \left(\sum x_i^2 \sqrt{p_i}^2\right)^{1/2}$