Méthodes à retenir :

- Pour déterminer si un matrice A est diagonalisable, on commence par calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ **sous forme factorisée**.
  S'il est simplement scindé, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
  Sinon A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre λ de multiplicité $m_\lambda \geq 2$, la dimension d_λ du sous-espace propre E_λ (que l'on détermine en résolvant le système $AX = \lambda X$) vérifie $m_\lambda = d_\lambda$.
- Pour justifier qu'une matrice A n'est pas diagonalisable, il suffit de connaître une valeur propre λ pour laquelle $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)) < m_\lambda$, où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_A.
- Si χ_A n'est pas simplement scindé, A peut être non diagonalisable, comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...
- Si A est diagonalisable, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée dans une base de vecteurs propres adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda$ est la matrice diagonale par blocs $D_\lambda = \mathrm{Diag}(\lambda\, \mathrm{I}_{\dim(E_\lambda)})$. La matrice de changement de base P est obtenue en mettant en colonnes les vecteurs d'une base adaptée de vecteurs propres, et on a la relation $P^{-1}AP = D$.
- Il faut savoir réécrire matriciellement les relations de récurrence pour une ou plusieurs suites.

I. Applications directes

Exercice 1 ☆☆ *diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$*

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 ☆ *récurrence linéaire d'ordre 2*

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence :
$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 3 ☆☆ *récurrence linéaire d'ordre 3*

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et la relation de récurrence :
$u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 4 ☆

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f dont on donne la matrice dans la base canonique, dans les cas suivants :
a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 ☆

Dans chacun des cas de l'exercice précédent, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres qui ont été obtenues. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 6 ☆

Lorsque cela est possible diagonaliser dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 ☆☆ *vecteurs propres*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $v_1(-1;1;1)$ et $v_2(0;1;0)$ sont des vecteurs propres de f. A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
2. Vérifier que $\mathrm{Ker}\, f$ est une droite vectorielle.
3. En déduire que f est diagonalisable.

II. Exercices

Exercice 8 ☆☆☆ *application de la réduction*

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A et diagonaliser A.
2. Calculer $A^n,\quad n\in\mathbb{N}^*$.
3. On considère les trois suites réelles u,v,w définies par leurs premiers termes u_0,v_0,w_0 et les relations suivantes : $\begin{cases} u_n &= -u_{n-1}+2v_{n-1}+w_{n-1}\\ v_n &= u_{n-1}+w_{n-1}\\ w_n &= u_{n-1}-v_{n-1}-w_{n-1}\end{cases}$
Calculer u_n,v_n,w_n en fonction de n et des premiers termes u_0,v_0,w_0.

Exercice 9 ☆

Soit $M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que M est inversible ssi $0\notin Sp_{\mathbb{R}}(M)$.
2. Montrer que M est inversible ssi M^2 est inversible.

Exercice 10 ☆☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n=2$ ou $n=3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une symétrie ? D'une projection ?

Exercice 11 ☆☆

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{tr}(A)=1$.

Justifier que 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$, puis que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, en précisant le spectre de A.

Exercice 12 ☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n=2$ ou $n=3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une homothétie ?

Exercice 13 ☆☆

Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2=A$ et $tr(A)=n$.
Démontrer que A est diagonalisable et que $A=I_n$.

Exercice 14 ☆☆ *Commutant*

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.
2. Déterminer les matrices $N\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $D=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & -\sqrt{5}\end{pmatrix}$.
3. En déduire les matrices $M\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
4. En déduire les matrices $R\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $R^2=A$.

Exercice 15 ☆☆

Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation :

1. $M^2=A$, d'inconnue M, où $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;
(on pourra remarquer que $A^2=0_3$)
2. $N^2=B$, d'inconnue N, où $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$;
(on pourra diagonaliserer que B et justifier que tout sous-espace propre pour B est sous-espace propre pour N)

Exercice 16 ☆☆

Est-ce que la matrice $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1/4 & -a-1/4 & 1\end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

Exercice 17 ☆☆ *Mines-Télécom*

Soit la matrice $A(\ell)=\begin{pmatrix}0 & \sin(\ell) & \sin(2\ell)\\ \sin(\ell) & 0 & \sin(2\ell)\\ \sin(2\ell) & \sin(\ell) & 0\end{pmatrix}$.
Discuter de la diagonalisabilité de $A(\ell)$ suivant les valeurs de $\ell\in\mathbb{R}$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 18 ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Calculer $\operatorname{tr}(A^n)$ en fonction de n.

Exercice 19 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC 2013*

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2 + I_n) \geq 0$.

Exercice 20 ☆☆☆ *matrice compagnon*

Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 21 *CCP 2010*

On dit que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie (P) si :
$\exists M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C});\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \det(M + \lambda A) \neq 0$.

1. Montrer que toute matrice N de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre complexe (i.e. : $\exists \mu \in \mathbb{C};\ \det(N - \mu I_n) = 0$)
2. Calculer $\det(I_n + \lambda T)$ où T est triangulaire supérieure à diagonale nulle, et en déduire que T vérifie (P).
3. Calculer le rang de $T_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Soient A Vérifiant (P) et B de même rang que A ; montrer que : $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{C});\ B = PAQ$ et en déduire que B vérifie (P).
5. Montrer que les matrices non inversibles de $\mathfrak{M}_n(C)$ vérifient (P).
6. Montrer que les matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(C)$ ne vérifient pas (P).
7. Même question pour $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$selon la parité de n.

Exercice 22 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $X^4 - 7X^3 + 12X^2 = 0_n$ prouver que $\operatorname{Tr}(A)$ est entier naturel.

Exercice 23 ☆☆☆ *diagonalisation simultanée*

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes diagonalisables de E.

Notons $s = \operatorname{Card}(Sp_{\mathbb{C}}(u))$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de u respectivement associés aux espaces propres $E_{\lambda_s,u}$.

On suppose que u et v commutent.

1. Que dire de la somme $E_{\lambda_1,u} + \cdots + E_{\lambda_s,u}$?
2. Soit $j \in [\![1, s]\!]$ Justifier que $E_{\lambda_j,u}$ est stable par v.
3. On suppose dans la suite que les sous-espaces propres de u sont tous des droites vectorielles. Comparer s et n. En déduire que les $v_{|E_{\lambda_j,u}}$ sont diagonalisable. Conclure alors que u et v sont diagonalisables **dans une même base**.

Exercice 24 ☆☆ *CCP 2016, 2017*

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \{M(a,b,c)\ /\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2.
2. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a,b,c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur ? Donner alors son image et son noyau.

IV. Trigonalisation

Exercice 25 ☆☆☆

On rappelle (c.f. exercice du chapitre 3) que si f est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

alors
$\mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^3) \supset \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E)^2) \supset \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id}_E))$.

1. Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
2. f est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Exercice 26 ☆☆☆ *trigonalisation*

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse.
3. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Calculer $(A')^n$ puis A^n pour tout entier naturel n.
5. l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

V. Avec Sympy

Il est disponible en ligne : http://live.sympy.org/

calculs de Diagonalisation :
pour
`>> M = Matrix([[-1,2,1],[1,0,1],[1,-1,-1]])` , la commande `>> M.eigenvects()` affiche :

$$\left[\left(-2,\ 1,\ \left[\left[\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right]\right]\right),\left(-1,\ 1,\ \left[\left[\begin{matrix}-1/2\\-1/2\\1\end{matrix}\right]\right]\right),\left(1,\ 1,\ \left[\left[\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right]\right]\right)\right]$$

Ainsi la matrice est diagonalisable via la matrice de passage $P=\begin{pmatrix}-1 & -1/2 & 1\\ 0 & -1/2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

calculs de Trigonalisation :

Par exemple, pour

`>> A = Matrix([[-1,2,0],[-1,2,1],[1,-1,2]])`

On affiche
$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$
pour

`>> A.eigenvects()`

On affiche
$$\left[\left(1,\ 3,\ \left[\left[\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right]\right]\right)\right]$$

Ce qui correspond à une seule valeur propre 1, de multiplicité 3,
et au sous-espace propre $\mathrm{Ker}(1\times I_3-A)=Vect_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

La matrice A n'est donc pas diagonalisable, car $1<3$.

En revanche pour `>> V1 = Matrix([[1],[1],[0]])` , `>> V2 = Matrix([[-1],[0],[1]])` et `>> V3 = Matrix([[1],[0],[1]])`

on a : $A*V1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=V1$, $A*V2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2*V1+V2$, $A*V3=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}=2*V2+V3$

Comme $\det(V1,V2,V3)=1\neq 0$, A est semblable à la matrice $T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Notes

[2] correction :

[3] correction : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$ via la matrice $u_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$

[11] correction : théorème du rang puis trace

[17] $\chi_A = (X - \sin(\ell))(X - \sin(2\ell))(X + \sin(\ell) - \sin(2\ell))$

Les valeurs propres sont $\sin(\ell), \sin(2\ell), \sin(\ell)(2\cos\ell - 1)$ et sont distinctes si $l \neq 0[2\pi]$, sinon, la matrice est nulle. Dans tous les cas elle est diagonalisable.