

Méthodes à retenir :

- Pour déterminer si une matrice A est diagonalisable, on commence par calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ sous forme factorisée.
S'il est simplement scindé, alors A est diagonalisable sur \mathbb{K} et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Sinon A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre λ de multiplicité $m_\lambda \geq 2$, la dimension d_λ du sous-espace propre E_λ (que l'on détermine en résolvant le système $AX = \lambda X$) vérifie $m_\lambda = d_\lambda$.
- Pour justifier qu'une matrice A n'est pas diagonalisable, il suffit de connaître une valeur propre λ pour laquelle $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) < m_\lambda$, où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_A .
- Si χ_A n'est pas simplement scindé, A peut être non diagonalisable, comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$
- Si A est diagonalisable, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associée dans une base de vecteurs propres adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda$ est la matrice diagonale par blocs $D_\lambda = \text{Diag}(\lambda I_{\dim(E_\lambda)})$. La matrice de changement de base P est obtenue en mettant en colonnes les vecteurs d'une base adaptée de vecteurs propres, et on a la relation $P^{-1}AP = D$.
- Il faut savoir réécrire matriciellement les relations de récurrence pour une ou plusieurs suites.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que la droite D_1 dirigée par $v_1(-1; 1; 1)$ est stable par f .
2. Montrez que la droite D_2 dirigée par $v_2(0; 1; 0)$ est stable par f .
3. Vérifier que $D_3 = \text{Ker } f$ est une droite vectorielle.
4. La somme $D_1 + D_2 + D_3$ est-elle directe ?

Exercice 2 ☆ suite récurrente linéaire

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle vérifiant $u_0 = 1, u_1 = 1$ et la relation de récurrence :
 $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Calculer u_n en fonction de n .

Exercice 3 ☆

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f dont on donne la matrice dans la base canonique, dans les cas suivants :

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 ☆

Dans chacun des cas de l'exercice précédent, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres qui ont été obtenues. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 5 ☆

Lorsque cela est possible diagonaliser dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Exercice 6 ☆☆ vecteurs propres

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $v_1(-1; 1; 1)$ et $v_2(0; 1; 0)$ sont des vecteurs propres de f . A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
2. Vérifier que $\text{Ker } f$ est une droite vectorielle.
3. En déduire que f est diagonalisable.

II. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆☆☆ trigonalisation

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 est

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = -e_1 + e_2 + e_3, v_2 =$

$$e_1 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de passage Q de \mathcal{B} à \mathcal{B}' ainsi que son inverse.
3. Déterminer la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .
4. Calculer $(A')^n$ puis A^n pour tout entier naturel n .
5. l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 8 ☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$.
Quelles peuvent être les valeurs propres d'une symétrie ?
D'une projection ?

Exercice 9 ☆☆☆ *application de la réduction*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer les valeurs propres de A et diagonaliser A .
- Calculer A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Exercices

Exercice 10 ☆

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que M est inversible ssi $0 \notin Sp_{\mathbb{R}}(M)$.
- Montrer que M est inversible ssi M^2 est inversible.

Exercice 11 ☆☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une symétrie ? D'une projection ?

Exercice 12 ☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et de trace 1. Justifier que 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$, puis que A est diagonalisable sur \mathbb{R} , en précisant le spectre de A .

Exercice 13 ☆

Soit E un e.v. de dimension finie $n = 2$ ou $n = 3$. Quelles peuvent être les valeurs propres d'une homothétie ?

Exercice 14 ☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$ et $tr(A) = n$. Démontrer que A est diagonalisable et que $A = I_n$.

Exercice 15 ☆☆ *diagonalisabilité sur \mathbb{C}*

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R} ?

IV. Pour aller plus loin

Exercice 18 ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{C} .
- Calculer $tr(A^n)$ en fonction de n .

Exercice 19 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC 2013*

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2 + I_n) \geq 0$.

- On considère les trois suites réelles u, v, w définies par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_n = -u_{n-1} + 2v_{n-1} + w_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} - v_{n-1} - w_{n-1} \end{cases}$$
 Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n et des premiers termes u_0, v_0, w_0 .

Exercice 16 ☆☆ *Commutant*

- Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer les matrices $N \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $D = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
- En déduire les matrices $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .
- En déduire les matrices $R \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$.

Exercice 17 ☆☆

Résoudre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation :

- $M^2 = A$, d'inconnue M , où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(on pourra remarquer que $A^2 = 0_3$)
- $N^2 = B$, d'inconnue N , où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
(on pourra diagonaliser B et justifier que tout sous-espace propre pour B est sous-espace propre pour N)

Exercice 20 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $X^4 - 7X^3 + 12X^2 = 0_n$ prouver que $Tr(A)$ est entier naturel.

Exercice 21 ☆☆☆ *diagonalisation simultanée*

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes diagonalisables de E .

Notons $s = \text{Card}(Sp_{\mathbb{C}}(u))$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de u respectivement associés aux espaces propres $E_{\lambda_s, u}$.

On suppose que u et v commutent.

1. Que dire de la somme $E_{\lambda_1, u} + \dots + E_{\lambda_s, u}$?
2. Soit $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ Justifier que $E_{\lambda_j, u}$ est stable par v .
3. On admet que les $v|_{E_{\lambda_j, u}}$ sont diagonalisables. Conclure que u et v sont diagonalisables **dans une même base**.

Exercice 22 ☆☆☆ *matrice compagnon*

Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 23 ☆☆ *CCP 2016*

Soit $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et

$E = \{M(a, b, c) / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. On note $J = M(0, 1, 0)$. Calculer J^2 . Exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I_3 , J et J^2 .
2. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?
3. La matrice J est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.
4. La matrice M est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
5. Montrer que M est diagonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si $b = c$.
6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a, b, c)$. Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur ? Donner alors son image et son noyau.

Exercice 24 ☆☆☆ *Mines-Ponts 2018*

u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{C} . On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v est nilpotent.

1. Montrer que $u+v$ est inversible ssi u est inversible.
2. Montrer que si u est inversible, $\det(u+v) = \det(u)$.

V. Avec Sympy

Il est disponible en ligne : <http://live.sympy.org/>

calculs de Diagonalisation :

pour

»» $M = \text{Matrix}([[[-1, 2, 1], [1, 0, 1], [1, -1, -1]]])$, la commande »» $M.\text{eigenvects}()$ affiche :

$$\left[\left(-2, 1, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(-1, 1, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(1, 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right]$$

Ainsi la matrice est diagonalisable via la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

calculs de Trigonalisation :

Par exemple, pour

»» $A = \text{Matrix}([[[-1, 2, 0], [-1, 2, 1], [1, -1, 2]]])$

On affiche

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pour

»» $A.\text{eigenvects}()$

On affiche

$$\left[\left(1, 3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right]$$

Ce qui correspond à une seule valeur propre 1, de multiplicité 3,

et au sous-espace propre $\text{Ker}(1 \times I_3 - A) =$

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice A n'est donc pas diagonalisable, car $1 < 3$.

En revanche pour »» $V1 = \text{Matrix}([[1], [1], [0]])$

, »» $V2 = \text{Matrix}([[[-1], [0], [1]]])$ et

»» $V3 = \text{Matrix}([[1], [0], [1]])$

$$\text{on a : } A * V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V1, A * V2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$2 * V1 + V2, A * V3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 * V2 + V3$$

Comme $\det(V1, V2, V3) = 1 \neq 0$, A est semblable

$$\text{à la matrice } T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes

² correction :

¹² correction : théorème du rang puis trace

²⁴ correction : 1. Si u inversible, pour $w = u^{-1}v$, on a $u + v = u(id + w)$, et comme $v^p = 0$, on a par commutation $w^p = 0$, donc $(id + w)$ inversible d'inverse $id - w + \dots + (-1)^{p-1}w^{p-1}$.

réciroquement, $u = u + v + (-v)$ et $-v$ est nilpotent.

2. on cotrigonalise.