Exercice 1 : (∗) Mouvement hélicoïdal d'une particule chargée
Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est injectée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_{0x}\overrightarrow{u_x} + v_{0z}\overrightarrow{u_z}$ depuis l'origine O du repère (O, x, y, z) en présence d'un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0\overrightarrow{u_z}$.

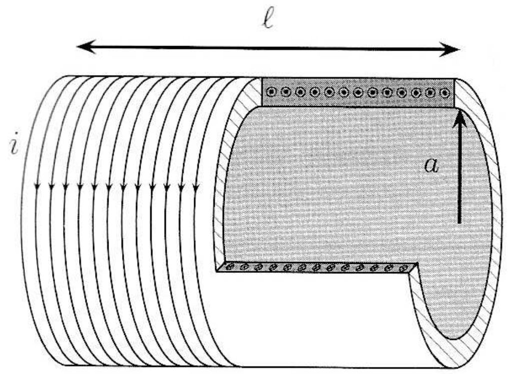
1. En travaillant dans la base cartésienne, écrire les équations différentielles vérifiées par $x(t), y(t)$ et $z(t)$
2. Résoudre ces équations et montrer que le mouvement est hélicoïdal, composé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon $\mathrm{R} = \frac{mv_{0x}}{q\mathrm{B}_0}$ et d'un mouvement de déplacement rectiligne uniforme à la vitesse v_{0z} selon z.
3. Exprimer le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance de déplacement selon z à chaque tour.

Exercice 2 : Équilibre d'une sphère conductrice
On considère une sphère conductrice de centre O, de rayon R et de conductivité électrique γ. Cette sphère est isolée et porte la charge totale Q.

1. On envisage un état d'équilibre de la sphère dans lequel la charge Q est uniformément répartie dans son volume. On repérera l'espace par le système de coordonnées sphériques de centre O.
   (a) Calculer le champ électrique créé en tout point de l'espace par cette distribution de charge.
   (b) Montrer que cette distribution de charge n'est pas compatible avec un état d'équilibre électrique de la sphère.
2. On étudie l'évolution de la sphère pour tout $t > 0$, à partir de l'instant $t = 0$ où la charge est répartie uniformément dans tout le volume de la sphère. On admet que le champ électrique conserve les mêmes propriétés de symétrie qu'à la question précédente.
   (a) Établir l'équation différentielle satisfaite par la densité volumique de charge ρ en tout point M de la sphère. En déduire l'expression de $\rho(M, t)$ puis caractériser la répartition de charge totale à l'instant t.
   (b) Calculer, à l'instant t, le champ électromagnétique dans tout l'espace. Caractériser l'état d'équilibre de la sphère.
   (c) Calculer la variation d'énergie électromagnétique, due aux champs électrique et magnétique, de la sphère entre l'état initial et l'état d'équilibre. On donne les expressions de la densité volumique d'énergie électrique $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ et de la densité volumique d'énergie magnétique $w_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2$.
   (d) À l'aide d'un bilan d'énergie, analyser la nature des échanges d'énergie au cours de cette évolution. On donne l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m) = -\,\mathrm{div}\left(\frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}\right) - \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{E}$$

Exercice 3 : Énergie dans un solénoïde
Un solénoïde de longueur ℓ, de rayon a, d'axe $(O, \overrightarrow{u_z})$ est constitué d'un enroulement de n spires circulaires par unité de longueur (voir figure ci-dessous). Afin de simplifier les calculs, on fait l'approximation du solénoïde infiniment long et on néglige tous les effets de bords. En particulier, on fera l'approximation $\overrightarrow{B} \simeq \overrightarrow{0}$ partout à l'extérieur du solénoïde. Les spires du solénoïde sont parcourues par l'intensité variable $i(t)$ On admet que le régime est suffisamment lent pour que le champ magnétique ait la même expression qu'en régime stationnaire. C'est l'approximation des régimes quasi stationnaires magnétique (ARQS magnétique).

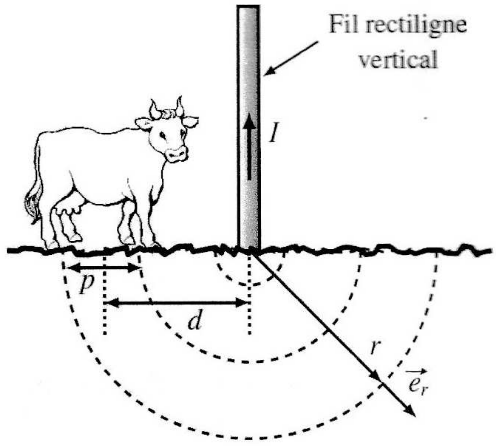


1. Rappeler l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le solénoide. En déduire l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ induit.
2. Rappeler l'expression de la densité volumique u_{em} d'énergie électromagnétique. À quelle condition le terme magnétique u_{m} est-il prépondérant devant le terme électrique u_{e} ? Interpréter.
3. On suppose la condition $u_{\text{m}} \gg u_{\text{e}}$ satisfaite. Déterminer l'énergie électromagnétique U_{em} contenue dans le solénoide. En déduire l'expression du coefficient d'auto-inductance L
4. Calculer le vecteur de Poynting en tout point intérieur au solénoide. En déduire l'expression de la quantité $\mathcal{E}$ d'énergie électromagnétique entrant dans le tube formé par le solénoide lorsque l'intensité passe de 0 à I. Interpréter.

Exercice 4 : $(*)$ Compression magnétique d'un plasma
Un plasma neutre est localisé dans la partie centrale d'un tube cylindrique de rayon R_0 et d'axe Oz, où il occupe l'intérieur d'un volume cylindrique coaxial de rayon R_1 ; la partie extérieure comprise entre ce volume et le tube (correspondant à $R_1 < r < R_0$ avec r distance à l'axe Oz) est vide et la pression y est nulle.
Un courant électrique d'intensité totale I circule parallèlement à Oz dans la zone correspondant à $R_2 < r < R_1$ où la densité volumique de courant est uniforme.

1. Déterminer le champ magnétique pour $r < R_0$
2. Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur un volume $\mathrm{d}\tau$.
3. On néglige la gravitation et on appelle p la pression en un point du plasma. En écrivant l'équilibre d'un élément de volume mésoscopique, établir l'expression de $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$ pour $r < R_1$.
4. Exprimer la pression pour $r < R_2$. On suppose désormais que $R_2 \simeq R_1$. Exprimer la pression dans le plasma en fonction de μ_0, I, R_1.
   On donne, pour $u \simeq 1$: $\frac{1}{(1-u^2)^2}\left(\frac{1-u^2}{2} + u^2 \ln\frac{1}{u}\right) \simeq \frac{1}{4} - \frac{1}{6}(u-1)$.
5. Le plasma est constitué d'ions et d'électrons de concentrations égales ; soit N cette concentration commune. On assimile le plasma à un gaz parfait et on admet en particulier que la température T des électrons considérés comme « particules » du gaz, est la même que celle des ions.
   Exprimer cette température en fonction de I, R_1, N, μ_0 et k_B. Calculer numériquement T pour $I = 1,0 \times 10^6$ A, $R_1 = 10$ cm et $N = 1,0 \times 10^{21}$ m^{-3}.

Résolution de problème : Tension de pas
Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter sous un arbre. L'éclair traversant l'arbre est modélisé par un fil rectiligne vertical semi-infini, parcouru par un courant électrique ascendant d'intensité $I = 15$ kA. Cette demi-droite prend fin au niveau du sol, dont la conductivité électrique est $\sigma = 1$ S.m^{-1}.



Une vache se trouve à la distance moyenne d de l'arbre et la distance entre ses deux pattes avant et arrière est p. On suppose que $d^2 \gg (p/2)^2$. Sachant que $R \approx 2,5$ kΩ est la résistance entre les pattes avant et arrière de la vache, distantes de $p \approx 1,5$ m, quelle la distance minimale d_{min} du point d'impact à laquelle doit se trouver l'animal pour que son corps soit traversé par un courant électrique d'intensité inférieure à la limite physiologique $I_{\text{max}} = 25$ mA évitant l'électrocution par le sol ?

Indication : si O est l'origine des coordonnées sphériques prise au pied du tronc, prendre la densité volumique de courant approximativement radiale dans le sol : $\vec{j} = j(r)\vec{u_r}$.