

**Exercice 1**

- a) On dresse la liste des vecteurs de la cinématique et de la dynamique :

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}, \vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}, \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qB_0\dot{y} \\ -qB_0\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire donne le système

$$\begin{cases} qB_0\dot{y} = m\ddot{x} \\ -qB_0\dot{x} = m\ddot{y} \\ 0 = m\ddot{z} \end{cases}$$

- b) L'équation en  $z$  s'intègre indépendamment des deux autres :

$$\dot{z} = v_{0z} \text{ et } z(t) = v_{0z}t$$

On primitive la deuxième équation différentielle en tenant compte des conditions initiales :

$$-qB_0\dot{x} = m\ddot{y}$$

et on injecte dans la première multipliée par  $m$  :

$$-q^2B_0^2x = m^2\ddot{x} \text{ soit } \ddot{x} + \frac{q^2B_0^2}{m^2}x = 0$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique qui s'intègre en tenant compte des conditions initiales et en posant  $\omega_0 = \frac{qB_0}{m}$  :

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \text{ et } \dot{x} = v_{0x} \cos(\omega_0 t)$$

**Exercice 2**

1. a. La charge étant uniformément répartie sur toute la sphère, la densité volumique de charge vaut  $\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ . Pour un point  $M$  quelconque, tous les plans contenant  $M$  et  $O$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrique en  $M$ ,  $\vec{E}(M)$ , appartient à tous ces plans dont l'intersection est la droite passant par  $O$ , de vecteur directeur  $\vec{u}_r$ . Donc  $\vec{E}(M)$  est porté par  $\vec{u}_r$ . De plus, la distribution de charge est invariante par toute rotation autour d'un axe passant par  $O$ , donc  $\vec{E}(M)$  ne dépend que de  $r$  et s'écrit  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ . Les surfaces équipotentielles, égales à sphères de centre  $O$ , étant fermées, peuvent faire office de surface de Gauss. En considérant comme surface fermée la sphère de centre  $O$  de rayon  $r$  passant par  $M$  de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ , il vient d'après le théorème de Gauss,  $E(r)4\pi r^2 = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$ , où  $Q_i$  désigne la charge à l'intérieur de la surface fermée.

En intégrant la première équation :

$$qB_0y = m\dot{x} - mv_{0x} \text{ donc } \omega_0 y = \dot{x} - v_{0x}$$

et on en déduit

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} [\cos(\omega_0 t) - 1]$$

Soit  $P$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $(O, x, y)$ , les équations horaires de son mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} x_P(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y_P(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} [\cos(\omega_0 t) - 1] \end{cases}$$

En définissant le point  $\Omega \begin{vmatrix} x_\Omega = 0 \\ y_\Omega = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \end{vmatrix}$ , on constate que la distance  $\Omega P$  vaut

$$\Omega P = \sqrt{(x_P - x_\Omega)^2 + (y_P - y_\Omega)^2} = \frac{v_{0x}}{\omega_0} = \frac{mv_{0x}}{qB_0}$$

$P$  est donc animé d'un mouvement circulaire uniforme de centre  $\Omega$  et de rayon  $R = \frac{mv_{0x}}{qB_0}$ . L'équation horaire  $z(t)$  correspond à un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $v_{0z}$ . C'est donc un mouvement hélicoïdal.

- c) La période du mouvement circulaire est

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi m}{qB_0}$$

donc le pas de l'hélice est

$$v_{0z}T_0 = \frac{2\pi m v_{0z}}{qB_0} = 2\pi R \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$

Si  $M$  est à l'intérieur de la sphère,  $Q_i = \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3}$  et donc  $E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ .

Si  $M$  est à l'extérieur de la sphère,  $Q_i = Q$  et donc  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

**b.** La sphère étant conductrice, la présence du champ électrique  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$  engendre l'existence d'un courant de charge de densité  $\vec{j}(M) = \gamma\vec{E}(M)$  qui provoque un déplacement de charges vers la périphérie du conducteur. Ainsi, cette distribution de charge n'est pas compatible avec une densité de courant de charge nulle caractéristique de l'état d'équilibre électrique.

**2. a.** En combinant la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \gamma\vec{E}$  avec les équations locales de Maxwell-Gauss et de conservation de la charge  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , il vient :

$$\begin{cases} \gamma \text{div } \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0 \quad (1)$$

À l'instant  $t = 0$ , la charge étant uniformément répartie sur toute la sphère, la densité volumique de charge vaut en tout point  $M$ ,  $\rho(M, t = 0) = \rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ . À  $M$  fixé, la résolution de l'équation (1) conduit à  $\rho(M, t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ , où  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$  représente le temps de relaxation de la charge dans le conducteur.

La sphère étant isolée, sa charge totale reste égale à  $Q$ , or la charge répartie dans son volume à l'instant  $t$  étant égale à  $Q_v(t) = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = Q \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ , la différence  $Q - Q_v(t) = Q\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$  est nécessairement répartie sur la surface de la sphère.

Cette migration des charges est due à l'existence d'un courant de charge de densité  $\vec{j}$  dans la sphère de conductrice vérifiant  $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ , porté par  $\vec{u}_r$ . La géométrie isotrope du vecteur densité de courant de charge engendre une répartition surfacique de charge  $\sigma$  homogène sur toute la surface de la sphère. On peut donc écrire :

$$\sigma 4\pi R^2 = Q - Q_v = Q\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

**b.** Le champ électrique se déduit du théorème de Gauss qui s'applique de la même manière qu'en question 1.. En conservant la même surface de Gauss, il vient :

- si  $M$  est à l'intérieur de la sphère,  $Q_i(t) = \frac{\rho_0 4\pi r^3}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  et donc :

$$E(r, t) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) ;$$

- si  $M$  est à l'extérieur de la sphère,  $Q_i(t) = Q$  et donc :  $E(r, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Il apparaît que le champ électrique à l'extérieur n'est pas affecté par la relaxation de la sphère et reste indépendant du temps.

Le calcul du champ magnétique nécessite l'analyse des symétries de la densité de courant de charge qui s'écrit sous la forme  $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ . On remarque qu'en régime variable, les lignes de champ du vecteur  $\vec{j}$  ne sont pas nécessairement fermées, ce qui signifie qu'il existe des lieux où la charge s'accumule.

Pour un point  $M$  quelconque, tous les plans contenant les points  $O$  et  $M$  sont des plans de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique,  $\vec{B}(M, t)$ , est orthogonal en  $M$  à tous ces plans dont l'intersection est la droite passant par  $O$ , de vecteur directeur  $\vec{u}_r$ . Ceci n'est possible que si  $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$ .

Au cours de la relaxation de la sphère, le vecteur densité de courant de charge, égal à :

$$\vec{j}(r, t) = \gamma \vec{E}(r, t) \frac{\gamma Q r}{4\pi \epsilon_0 R^3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{u}_r,$$

décroît au cours du temps et s'annule au bout d'un temps infini.

La sphère atteint donc l'équilibre électrique au bout d'un temps infini. Toute la charge  $Q$  est alors répartie en surface, selon la distribution surfacique  $\sigma_\infty = \frac{Q}{4\pi R^2}$ , le champ magnétique est nul, le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère et vaut  $\vec{E}_\infty = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$  à l'extérieur de la sphère.

À l'équilibre, le champ électrique étant nul à l'intérieur de la sphère, les charges, soumises à aucune force, restent immobiles.

c. Le champ magnétique étant toujours nul, l'énergie électromagnétique est égale à l'énergie électrique :

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \iiint_{\text{Espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau.$$

Le champ électrique à l'extérieur de la sphère restant identique tout au long de la relaxation, la variation d'énergie est donc égale à :

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t = \infty) - \mathcal{E}_{\text{em}}(t = 0) = - \iiint_{\text{Sphère}} \frac{\epsilon_0 E(t=0)^2}{2} d\tau.$$

D'après la question 1., pour tout point à l'intérieur de la sphère  $E(r) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R^3}$ . Il vient donc :

$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t = \infty) - \mathcal{E}_{\text{em}}(t = 0) = - \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} \int_{r=0}^R r^2 4\pi r^2 dr = - \frac{Q^2}{20\pi \epsilon_0 R}.$$

d. Le champ magnétique étant toujours nul, il en est de même pour le vecteur de Poynting. L'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit alors :

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \underbrace{\text{div } \vec{\Pi}_{\text{em}}}_0 = - \vec{j} \cdot \vec{E},$$

En intégrant cette égalité sur tout l'espace, il vient :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{em}}}{dt} = - \iiint_{\text{Sphère}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = - \iiint_{\text{Sphère}} \gamma E^2 d\tau.$$

L'énergie électromagnétique est une fonction décroissante du temps et sa dérivée temporelle est l'opposée de la puissance que la sphère conductrice consomme par effet Joule. Ainsi, la diminution de l'énergie électromagnétique s'identifie à la l'énergie dissipée par effet lors de la relaxation. Les courants qui ont assuré la migration des charges ont engendré une consommation d'énergie par effet Joule. Cet énergie consommée a été prélevée sur l'énergie électromagnétique.

### Exercice 3

1. En négligeant les effets de bords et en se plaçant dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, le champ magnétique dans le solénoïde est  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ . Le champ électrique induit se détermine en intégrant l'équation de Maxwell-Faraday  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , conformément à la méthode présentée à la question 2 de l'exercice 7.6 (voir page 209),

$$\forall r < a, \quad \vec{E}(r,t) = -\frac{r}{2} \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta .$$

2.

#### Rappel

#### Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique est  $u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ . Son unité SI est le  $J \cdot m^{-3}$ .

Grâce aux expressions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , on peut exprimer chaque terme et les comparer en en faisant le rapport,

$$\frac{u_e}{u_m} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2}{\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=\frac{1}{c^2}} \frac{E^2}{B^2} = \frac{1}{c^2} r^2 \left( \frac{di}{dt} \right)^2 . \quad (7.4.1)$$

À défaut de calculer exactement ce rapport, on peut en faire une estimation dimensionnelle (selon la méthode présentée à la page 393) en introduisant la durée typique  $\tau$  sur laquelle ont lieu les variations de  $i(t)$ . Dans ce cas,  $\frac{di}{dt} \sim \frac{i}{\tau}$ .

La contribution magnétique de l'énergie domine si le rapport (7.4.1) sans dimension est très faible devant 1. On travaille en  $r = a$ , qui est la zone du solénoïde où le rapport risque d'être le plus grand, donc

$$\frac{u_e}{u_m} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{c^2} a^2 \left( \frac{i}{\tau} \right)^2 \ll 1 \Rightarrow a^2 \ll c^2 \tau^2 . \quad (7.4.2)$$

Cette condition, que l'on peut aussi traduire par  $a \ll c\tau$ , correspond à l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS). En effet,  $c\tau$  représente la distance parcourue par une onde électromagnétique dans le vide pendant la durée  $\tau$ , tandis que  $a$  est la taille du solénoïde. Elle signifie que, à l'échelle  $a$  du solénoïde, les phénomènes propagatifs peuvent être négligés : tout se passe comme si la propagation se faisait instantanément. En particulier, le champ magnétique s'adapte instantanément aux variations du courant, comme si le régime était stationnaire, d'où la validité de l'expression  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$  tant que la condition (7.4.2) est satisfaite.

3. L'énergie électromagnétique se résume à la contribution magnétique  $U_m$ , que l'on obtient en intégrant  $u_m$  uniquement sur le volume du solénoïde (car  $u_m = 0$  en dehors si on néglige les effets de bords),

$$U_m = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\ell} \frac{B^2(M,t)}{2\mu_0} \underbrace{r \, dr \, d\theta \, dz}_{d\tau} \Rightarrow U_m = \frac{1}{2} \mu_0 (ni)^2 \pi a^2 \ell.$$

Cette expression doit s'identifier à l'énergie magnétique  $U_m = \frac{1}{2} Li^2$ , donc

$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 \ell.$$

On retrouve le résultat obtenu dans le cours de première année par un calcul direct de flux magnétique. Le coefficient  $L$  est positif et homogène à  $\mu_0$  multiplié par une longueur ( $n$  s'exprime en  $m^{-1}$ , car c'est le nombre de spires par unité de longueur).

4.

### Rappel Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  s'exprime en  $W \cdot m^{-2}$  en unités SI. Son flux à travers une surface orientée représente la puissance électromagnétique instantanée qui traverse cette surface.

Avec les expressions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le solénoïde, on calcule

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \forall r < a, \vec{R} = -\mu_0 n^2 \frac{r}{2} \frac{di}{dt} i \vec{u}_r.$$

Pour avoir la puissance  $\mathcal{P}$  électromagnétique entrant dans le solénoïde, on calcule le flux *entrant* de  $\vec{R}$  à travers la surface entourant le solénoïde ( $r = a$ ),

$$\mathcal{P} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\ell} \underbrace{\vec{R}(a,t) \cdot (-a \, d\theta \, dz \, \vec{u}_r)}_{d\vec{S}_{entrant}} \Rightarrow \mathcal{P} = \underbrace{\mu_0 n^2 \pi a^2 \ell}_{L} i \frac{di}{dt}.$$

L'énergie apportée par rayonnement à travers la surface durant  $[0, t]$  est l'intégrale temporelle de la puissance,

$$\mathcal{E} = \int_{t=0}^t \mathcal{P}(t) \, dt = \int_{t=0}^t L i \frac{di}{dt} \, dt = \int_{i(t=0)=0}^{i(t)} L i \, di = \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2(t).$$

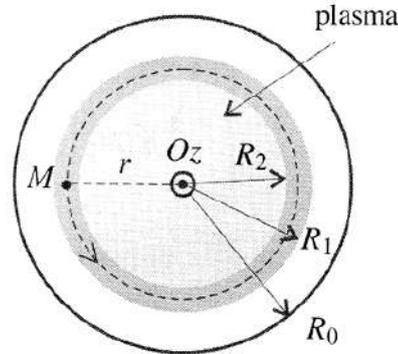
On retrouve l'énergie magnétique contenue dans une bobine. Cette expression est obtenue en électrocinétique en intégrant  $\mathcal{P} = u(t) \times i(t)$  (puissance électrique reçue par la bobine).

### Synthèse Énergie magnétique d'une bobine

D'après le calcul qui précède, on peut interpréter  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2$  comme l'énergie apportée dans la bobine par rayonnement lors des variations temporelles du champ électromagnétique.

**Exercice 4**

1. Soit  $M$  un point quelconque de coordonnées  $(r, \theta, z)$  (coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$ ). La distribution de courant admet le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  comme plan de symétrie et elle est invariante par translation parallèlement à  $Oz$  et rotation autour de  $Oz$ ; le champ magnétique en  $M$  est donc de la forme :  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .



On applique le théorème d'Ampère au cercle d'axe  $Oz$  passant par  $M$ , de rayon  $r$ , orienté dans le sens direct autour de  $Oz$ .

- $\mathcal{C}_B = \oint_{\text{cercle}} (B(r)\vec{u}_\theta) \cdot (dl\vec{u}_\theta) = 2\pi r \times B(r);$
- $I_\Gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_2 \\ I \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ I & \text{si } R_1 < r < R_0 \end{cases}$

Du théorème d'Ampère :  $\mathcal{C}_B = \mu_0 I_\Gamma$ , on tire :  $\vec{B}(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \vec{u}_\theta & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } R_1 < r < R_0 \end{cases}$

2. La force de Laplace exercée sur le volume  $d\tau$  est  $d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$ . L'équilibre entre cette force et la force de pression  $d\vec{F}_p = -\text{grad} p d\tau$  donne la relation :  $\text{grad} p = \vec{j} \wedge \vec{B}$ . On va expliciter ce gradient.

La densité volumique est égale à  $\vec{j} = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$  dans la couche  $R_2 < r < R_1$ ; elle est nulle dans le reste de l'espace. La relation précédente donne un gradient de pression colinéaire à  $\vec{u}_r$  (ce qui était prévisible puisque, par symétrie,  $p$  ne peut dépendre que de  $r$ ) et :

$$\frac{dp}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_2 \\ -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 (R_1^2 - R_2^2)^2} \frac{r^2 - R_2^2}{r} & \text{si } R_2 < r < R_1 \\ 0 & \text{si } R_1 < r < R_0 \end{cases}$$

On constate que la pression est uniforme pour  $r < R_2$ .

3. La pression est nulle pour  $r > R_1$  ; pour  $r < R_2$  elle vaut :

$$p(r < R_2) = - \int_{R_2}^{R_0} \frac{dp}{dr} dr = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{dp}{dr} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2(R_1^2 - R_2^2)^2} \left( \frac{R_1^2 - R_2^2}{2} - R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right).$$

On suppose que  $R_2 \simeq R_1$ . On pose  $u = R_2/R_1$  et on utilise la formule donnée dans l'énoncé. On a donc à l'ordre le plus bas :

$$p(r < R_2) \simeq \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^2} = \frac{B(R_1)^2}{2\mu_0}.$$

4. La loi des gaz parfaits s'écrit :  $p = 2Nk_B T$  (en tenant compte des deux sortes de particules).

$$\text{Il vient donc : } T = \frac{p}{2Nk_B} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi^2 R_1^2 Nk} = 58 \times 10^6 \text{ K.}$$

### Résolution de problème

Indications : Commencer par établir, en régime stationnaire, l'expression du potentiel électrique  $V(r)$  dans le sol où  $r$  est la distance au pied de l'arbre (origine des coordonnées sphériques).

Soit  $O$  l'origine des coordonnées sphériques dans le sol, prise au pied de l'arbre.

Le flux de  $\vec{j} = j(r)\vec{u}_r$ , avec  $j(r) < 0$  à travers une demi-sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  est, par définition, l'intensité du courant à travers cette surface, à savoir  $-I$  avec  $I > 0$  car le courant est entrant pour remonter ensuite dans l'arbre, puis dans l'éclair :

$$-I = \iint_{1/2 \text{ sphère}} \vec{j}(r) \cdot \vec{dS} = \iint_{1/2 \text{ sphère}} j(r) dS = j(r) \cdot 2\pi r^2$$

car  $\vec{dS} = dS \vec{u}_r$ , (vers l'extérieur) et  $j(r)$  uniforme sur la demi-sphère de rayon  $r = \text{cte}$ .

On en déduit  $\vec{j} = -\frac{I}{2\pi r^2} \vec{u}_r$ , une densité de courant dans le sol partout radiale dirigée vers  $O$ .

La loi d'Ohm appliquée au sol conducteur de conductivité électrique  $\sigma$  s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{I}{2\pi\sigma r^2} \vec{u}_r$$

Le potentiel électrique  $V(r)$  est relié au champ  $\vec{E}$  par  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$ , ici :

$$\text{d'où par intégration } \boxed{V(r) = -\frac{I}{2\pi\sigma r}} \text{ avec le choix } V(r \rightarrow \infty) = 0.$$

Le potentiel augmente avec la distance à l'arbre ; pour les pattes avant et les pattes arrière, on a respectivement :

$$V_{av.} = V(d - p/2) = -\frac{I}{2\pi\sigma(d - p/2)} \text{ et } V_{ar.} = V(d + p/2) = -\frac{I}{2\pi\sigma(d + p/2)}$$

La différence de potentiel entre les pattes (ou tension de pas) est :

$$U_p = V_{ar.} - V_{av.} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{d - p/2} - \frac{1}{d + p/2} \right) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{p}{d^2 - (p/2)^2}$$

Avec l'hypothèse  $d^2 \gg (p/2)^2$ , il vient l'expression approchée :

$$U_p \approx \frac{Ip}{2\pi\sigma d^2}$$

On a  $U_{p\max} = RI_{\max}$  la tension maximale acceptable, or  $U_p$  diminue lorsque  $d$  augmente, il faut donc  $d \geq d_{\min}$  donné par :

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{Ip}{2\pi\sigma R I_{\max}}}$$

AN :  $d_{\min} = 7,6 \text{ m}$

Dans ces conditions on vérifie l'approximation  $\frac{p^2/4}{d_{\min}^2} \approx 10^{-2} \ll 1$ .

Rq : Pour l'homme  $p \approx 30 \text{ cm}$  est plus petit que pour la vache, la tension de pas et le courant qui en résulte et qui circule dans le corps humain sont donc moindres. À même distance de l'arbre, l'effet de l'éclair est donc plus dangereux pour une vache que pour un homme.