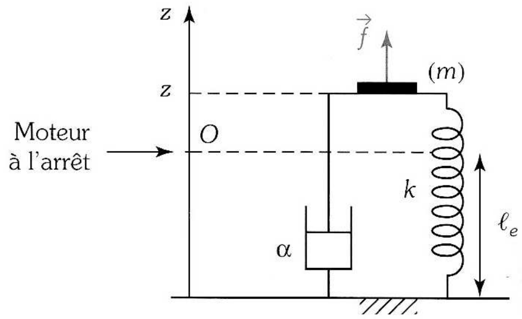
Exercice 1 : Vibrations d'un moteur

Lors du fonctionnement d'un moteur (de compresseur, par exemple), il existe des vibrations du châssis qui entoure ce moteur. Il est alors nécessaire de prévoir un système de suspension. Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m. La suspension peut être modélisée par un ressort de raideur k, de longueur l au repos, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage $\overrightarrow{f_d} = -\alpha\dot{z}\overrightarrow{u_z}$.

L'origine O de l'axe Oz vertical ascendant est confondue avec la position du moteur lorsqu'il ne fonctionne pas et qu'il est immobile (voir ci-dessous). La longueur du ressort est alors égale à l_e.



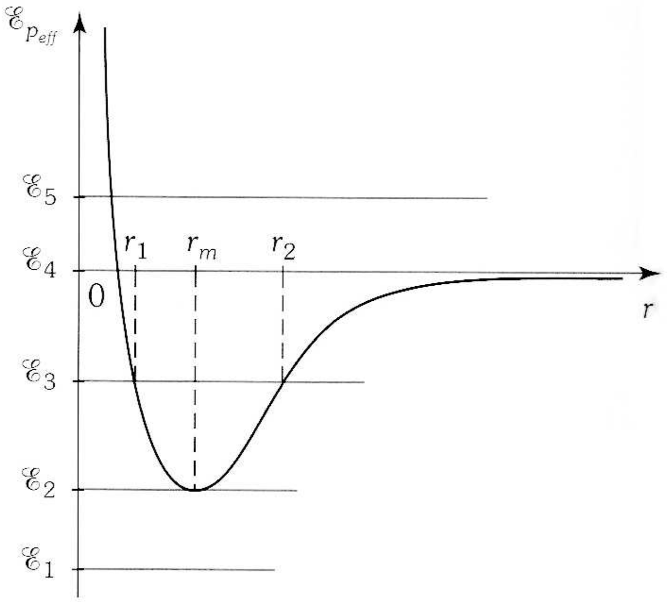
Quand le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire sinusoïdale $\vec{f} = kA\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$, A étant une constante positive. On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, et $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{mk}}$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M, d'élongation $z_{(t)}$.
2. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire d'oscillations du point M ?
3. En régime forcé, déterminer l'amplitude Z de l'élongation $z_{(t)}$.
4. On veut se limiter à des vibrations dont l'élongation est toujours inférieure à la valeur A. Quelles sont alors les valeurs permises pour le paramètre β ?

Exercice 2 : Satellite

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Le satellite SPOT (spécialisé dans l'observation de la Terre) est en orbite circulaire autour de la Terre (centre O, masse m_{T}, rayon R_{T}) à l'altitude $h = 832$ km. Calculer numériquement la vitesse v de ce satellite sur son orbite. Données numériques : $m_{\mathrm{T}} = 5,9810^{24}$ kg, $R_{\mathrm{T}} = 6370$ km, $G = 6,6710^{-11}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}$(constante gravitationnelle).
2. Considérons un satellite (masse m), de vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$, en mouvement quelconque autour de la Terre, et uniquement soumis à la force gravitationnelle terrestre.
   (a) Justifier que le mouvement de M est plan et préciser le plan de la trajectoire à partir des conditions initiales.
   (b) Ox étant l'axe polaire, on pose $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_r}) = \theta$ et on note C la constante des aires. Quelle est l'expression de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{\mathrm{m}}$ du point matériel M en coordonnées polaires ? En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathscr{E}_{\mathrm{peff}}$ en fonction de la distance $\mathrm{OM} = r$ au centre de force.
   (c) Le graphe de la fonction $\mathscr{E}_{\mathrm{peff}}(r)$ est représenté ci-dessous. Justifier que l'énergie mécanique du satellite est une constante du mouvement. Préciser pour les diverses valeurs $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$, $\mathscr{E}_4 = 0$ ou $\mathscr{E}_5$ de l'énergie mécanique la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état, lié ou de diffusion.



Exercice 3 : (∗) Points de Lagrange
Le télescope spatial Herschel a été envoyé dans l'espace le 14 mai 2009. Il permet de prendre des images dans le domaine de l'infra-rouge lointain (longueur d'onde millimétrique) d'objets qui ne seraient pas ou très peu discernables dans le domaine visible (grains de poussière et gaz formant une nébuleuse par exemple). Le télescope tourne actuellement autour d'un point de l'espace appelé « point de Lagrange L2 » du système Soleil-Terre. Ce problème propose de comprendre la particularité de ce point.

On introduit le référentiel héliocentrique R_H supposé galiléen, ayant pour origine le centre de masse S du Soleil et dont les axes pointent trois étoiles lointaines. On considère le référentiel R' de repère $Sx'y'z'$ direct défini de la façon suivante :
- axe Sx' dirigé selon la droite ST où T représente le centre de masse de la Terre.
- axe Sz' pointant une étoile lointaine.

On suppose que la trajectoire de la Terre autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique R_H est circulaire de rayon D. On note G la constante de gravitation, M_S et M_T les masses respectivement du Soleil et de la Terre.

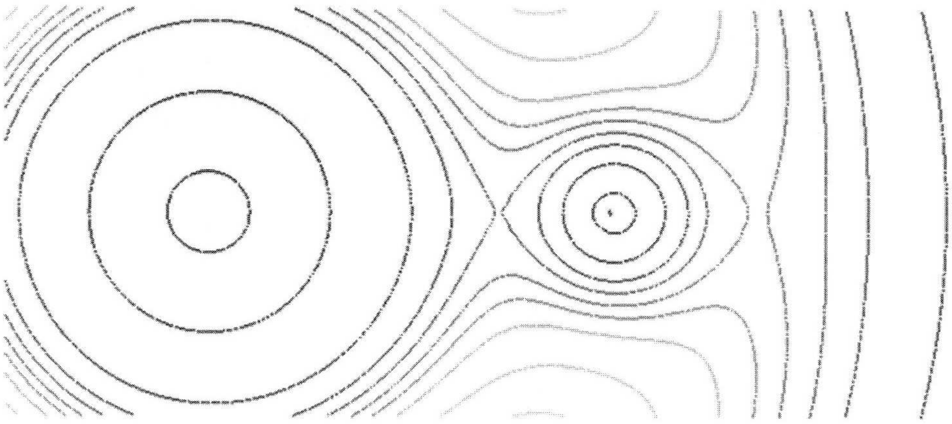
1. Montrer à l'aide de la loi du moment cinétique que la vitesse angulaire Ω de la Terre autour du Soleil dans R_H est nécessairement constante. A l'aide de la loi de la quantité de mouvement, donner son expression en fonction de G, M_S et D.

On considère un point matériel M de masse m situé sur l'axe Sx' à une distance $d \ll D$ de la Terre, côté opposé au Soleil.

2. Montrer que si $d = D\left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{\frac{1}{3}}$, le point M est en équilibre dans le référentiel R'. On appelle cette position le point de Lagrange L2. Pour aboutir à cette expression de d, on prendra en compte le fait que $d \ll D$ et $M_T \ll M_S$ dans les calculs.
3. Application numérique : calculer d sachant que $D = 150$ millions de km $M_T = 6,0.10^{24}$ kg et $M_S = 2,0.10^{30}$ kg.
4. Étudier sans calcul supplémentaire la stabilité de cet équilibre selon l'axe Sx'.
5. Montrer qu'il existe un autre point de Lagrange, appelé L1, entre le Soleil et la Terre. À quelle distance de la Terre est-il situé ?

6. Montrer que la force centrifuge exercée sur M dans R' dérive d'une énergie potentielle que l'on calculera. On pourra utiliser le repère et les coordonnées cylindriques pour cette question.
7. Exprimer l'énergie potentielle totale (gravitationnelle + axifuge) du point M Lorsque celui-ci est en mouvement dans R', quelle force supplémentaire apparaît ?

Le dessin ci-dessous représente les courbes équipotentielles de l'énergie potentielle totale du point M dans le cas où $d = 0,3D$.



8. Indiquer où se situent le Soleil, la Terre, les points de Lagrange L1 et L2. Tracer quelques lignes de champ de forces. En déduire la stabilité des points de Lagrange dans le plan perpendiculaire à l'axe Soleil-Terre.

Remarque : le télescope Herschel tourne autour du point de Lagrange L2 à une distance comprise entre 500000km et 800000km. Tous les 23 jours un réajustement de la trajectoire est fait (compte tenu de son instabilité) à l'aide de rétrofusées utilisant de l'hydrazine comme carburant.
Enfin, on peut préciser qu'il existe au total cinq points de Lagrange différents dans le système Soleil-Terre. Le lecteur intéressé trouvera de multiples explications détaillées sur le site de wikipédia dans l'article « point de Lagrange ».

Exercice 4 : Mouvement d'une voiture
Une voiture est modélisée par quatre roues cylindriques identiques de rayon R liées deux à deux par un essieu, chacun étant relié au châssis du véhicule par une liaison pivot parfaite. On considère le problème comme plan : les deux roues d'un même essieu étant strictement équivalentes, on considère que chaque essieu ne comporte qu'une seule roue située dans le plan de symétrie du véhicule (plan de la figure ci-dessous).

Les deux roues ont pour centres de gravité G_1 (roue arrière) et G_2 (roue avant), distants de $G_1G_2 = a$. Le contact roue-sol est ponctuel respectivement en I_1 (roue arrière) et I_2 (roue avant) et le roulement s'effectue sans glissement. Le centre d'inertie G du véhicule, de masse totale m, est situé dans le plan de la figure sur la bissectrice du segment $[G_1G_2]$ à une distance b du sol. Le moteur, prenant appui sur le châssis, fournit à la roue arrière un couple $\Gamma\overrightarrow{u}_z$ dont la puissance est $\mathcal{P}$. Le véhicule est de plus soumis à une force de frottement fluide (résistance de l'air) $\overrightarrow{F}_{\text{fluide}} = -\lambda v_0 \overrightarrow{v_0}$ dont la résultante s'applique en G (pour simplifier).

Les composantes des réactions du sol sur le véhicule sont indiquées sur le schéma. Le référentiel $\mathcal{R}$ du sol est galiléen. On note $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la pesanteur. Le châssis du véhicule se déplace selon un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{v_0}$, sur un plan incliné faisant l'angle α avec le plan horizontal.

1. Montrer que T_2 est nul.

2. En appliquant la loi de la quantité de mouvement au véhicule entier, donner l'expression de T_1 en fonction de m, α, λ, v_0 et g ainsi qu'une relation entre N_1, N_2, m, g et α. Quelle est la force permettant au véhicule de gravir la pente à vitesse constante et de vaincre la résistance de l'air ?
3. En appliquant la loi du moment cinétique par rapport à l'axe de l'essieu aux roues arrières (motrices) du véhicule, dans le référentiel du châssis, exprimer T_1 en fonction de Γ et de R. Après avoir justifié le signe de Γ, en déduire le sens de la force $\overrightarrow{T_1}$.
4. Déduire des deux questions précédentes l'expression de Γ, le couple que le moteur doit fournir à la roue motrice pour que le véhicule maintienne une vitesse constante, en fonction des données de l'énoncé. En déduire la puissance $\mathcal{P}$ que doit fournir le moteur.
5. Pour un déplacement d'une distance ℓ du véhicule dans le référentiel de la route, calculer le travail total $\mathcal{W}_{\text{ext}}$ fourni par les forces extérieures à la voiture. Quel est son signe ? D'un point de vue énergétique, pourquoi la vitesse de déplacement de l'ensemble reste-t-elle constante ?
6. On s'intéresse à la répartition de la réaction du sol sur les roues avant et arrière du véhicule
   (a) En appliquant au véhicule la loi du moment cinétique par rapport à l'axe G_z (parallèle à l'axe z et passant par G), dans le référentiel du châssis, écrire une relation entre N_1, N_2 et T_1.
   (b) En utilisant un des résultats de la question 2 , en déduire les expressions de N_1 et N_2 en fonction des données de l'énoncé.
   (c) Dans le cas d'une vitesse très élevée ou d'une pente α trop importante, quel phénomène risque-t-on d'observer ? Ce phénomène se produirait-il si les roues motrices étaient situées à l'avant du véhicule ? À quel autre phénomène pourrait-on être confronté ?
7. Calculer numériquement N_1, N_2, T_1, $|\Gamma|$ et $\mathcal{P}$. Données : $v_0 = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 10°$; $\lambda = 0,41$ SI ; $m = 1,4 \cdot 10^3$ kg ; $g = 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a = 2,7$ m ; $b = 0,50$ m ; $R = 0,31$ m. Quelle est la valeur minimale admissible du coefficient de frottement solide f du contact roues-sol pour que les roues arrière ne glissent pas ?