

Les équations de la mécanique des fluides sont souvent difficiles à résoudre. C'est pourquoi, au-delà des compétences et méthodes du cours, on insiste notamment dans les exercices à suivre sur deux capacités importantes :

- savoir simplifier une équation en estimant les ODG numériques des différents termes ;
- déterminer une l'expression littérale d'une grandeur en ordre de grandeur, en listant les paramètres pertinents du problèmes, et en procédant à une analyse dimensionnelle. Cette capacité demande de l'initiative, et un certain sens physique.

Exercice 1 : Étude de la course sur l'eau d'un lézard basilic

Certains petits lézards peuvent courir sur l'eau. Le but de cet exercice est de comprendre l'origine de la force permettant de supporter le lézard et de déterminer son ordre de grandeur. Il est fondé sur une étude expérimentale qui a permis de filmer la course du lézard et de comprendre son fonctionnement. Les lézards étudiés ont des masses variant entre 3 g (adolescent) et 80 g (adulte). La figure 1 présente les deux étapes essentielles de la course :

- Phase de frappe : le pied du lézard frappe l'eau et s'enfonce de quelques centimètres.
- Phase de retrait : le lézard retire son pied de l'eau avant que celle-ci ne se referme sur son pied.

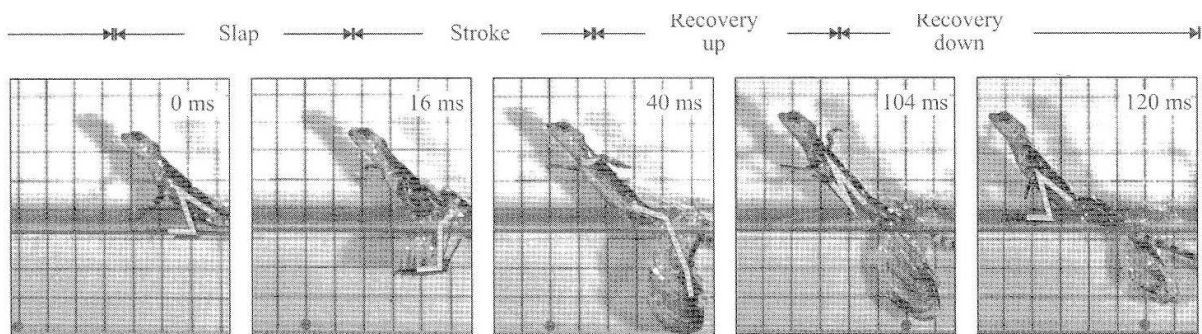


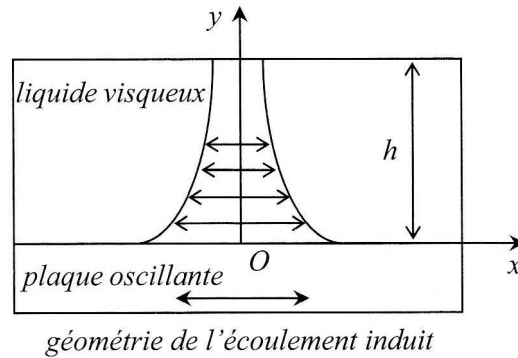
FIGURE 1 – Prises de vue des étapes essentielles de la course d'un lézard pesant 21 g. La surface S du pied est de l'ordre de 3 cm^2 . Le pas de la grille est de 2 cm. Chaque image porte la date de la prise de vue. Le document est tiré de « Three-dimensional hindlimb kinematics of water running in the plumed basilisk lizard (*Basiliscus plumifrons*) », S. Tonia Hsieh, *The Journal of Experimental Biology* (2003) 206, 4363-4377.

1. En utilisant les documents fournis, estimer numériquement la profondeur maximale h à laquelle plonge le pied du lézard et la vitesse moyenne v_m du pied lors de la phase de frappe.
2. Déterminer l'ordre de grandeur de la force de pression d'origine hydrostatique F_1 s'exerçant sur le pied du lézard lorsque celui-ci est au plus bas. Cette force est-elle suffisante pour soutenir le lézard ?
3. Déterminer le nombre de Reynolds de l'écoulement de l'eau autour du pied. Proposer un modèle de la force F_2 exercée par l'eau en écoulement sur le pied et estimer son ordre de grandeur numérique.
4. En déduire la force moyenne F_m exercée par l'eau sur les deux pieds lors d'un cycle de course représenté à la figure 1 et conclure.
5. (*) À l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'ordre de grandeur du temps T que met l'eau à se refermer sur le pied. Comparer le résultat numérique aux données des photographies de la figure 1. Que deviendrait la force F_m si le lézard ne retirait pas son pied assez vite ?

Données. Masse volumique de l'eau $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, viscosité dynamique de l'eau $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, intensité du champ de pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice 2 : Cisaillement d'un fluide visqueux et ondes sismiques

Considérons une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan (O, x, y) . Un fluide visqueux incompressible (par exemple du miel de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une grande épaisseur h . Le fluide occupe alors le demi-espace $z > 0$ (tout se passe comme si l'espace était illimité).



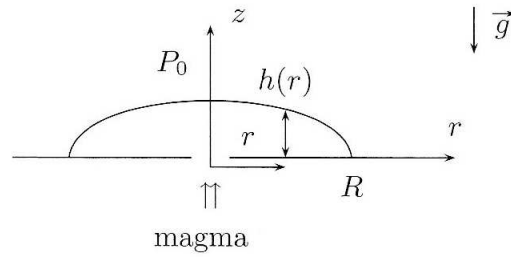
La plaque oscille à la pulsation ω , sa vitesse étant $\vec{V}_{\text{plaque}} = V_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. On néglige les phénomènes de pesanteur. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \overrightarrow{\Delta}(\vec{v}).$$

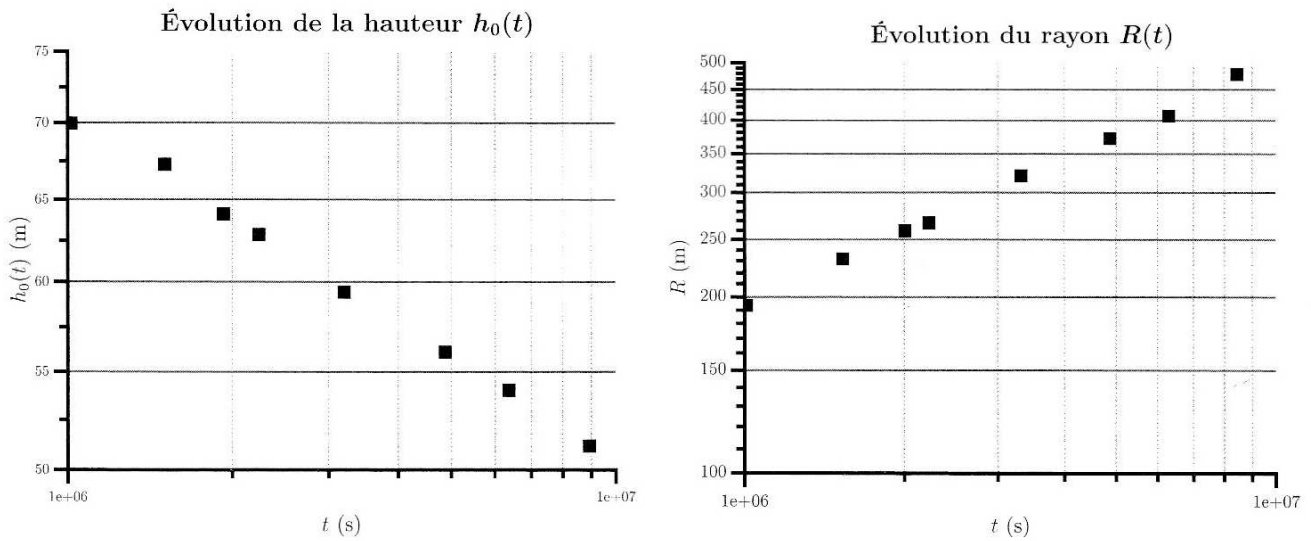
1. En analysant les invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque, préciser de quelles variables peut dépendre le champ de vitesse.
2. Montrer que le terme convectif $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de la cote z et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle suivante $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ où ν_c est la viscosité cinématique du fluide (à ne pas confondre avec la vitesse v), que l'on exprimera en fonction de ρ et de η .
3. On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \underline{f}(z) e^{i\omega t} \vec{e}_x$. Donner la forme générale de $\underline{f}(z)$, on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\nu_c}{\omega}}$. En étudiant le comportement aux limites du fluide, donner l'expression du champ de vitesse réel dans le fluide. Commenter l'expression obtenue.
4. Dans le cas d'un fluide mille fois plus visqueux que l'eau (on rappelle que la viscosité de l'eau est de $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$) et pour une fréquence de 2 Hz, calculer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ en prenant comme masse volumique la masse volumique de l'eau.
5. Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique très grande, si bien que leur viscosité cinématique ν_c est de l'ordre de $\nu_c \approx 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques hertz.

Exercice 3 : (*) Éruption d'un volcan

On s'intéresse à un modèle de l'éruption du volcan de la Soufrière de Saint-Vincent, du 13 avril au 26 octobre 1979. Durant cette période, un dôme de lave ayant une symétrie de révolution autour de la verticale est lentement extrudé du fond du cratère. Pendant les 5 mois d'existence de ce dôme de lave (voir figure ci-dessous), une équipe de chercheurs a effectué des mesures précises de son rayon $R(t)$ et de sa hauteur maximale $h_0(t) = h(r=0, t)$ (en son centre).



On a représenté sur la figure ci-dessous les graphes de $R(t)$ et $h_0(t)$ en échelle log-log, avec R et h_0 en mètres et t en secondes (t varie entre $1 \cdot 10^6$ s et $1 \cdot 10^7$ s).



- Justifier que l'on peut écrire, à partir de ces graphes, les deux lois suivantes : $R(t) = at^p$ et $h_0(t) = bt^q$, et donner les valeurs expérimentales de p , q , a et b obtenues à partir des courbes.

Le magma est assimilable à un fluide newtonien, de viscosité η et de masse volumique μ , dont le champ de vitesse $\vec{v}(r, \theta, z, t)$ obéit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \mu \vec{g}$$

On donne $\Delta \vec{v} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \vec{u}_r$. On note U l'ordre de grandeur de la norme du champ de vitesse.

- Comparer les ordres de grandeur des deux vitesses $\frac{dh}{dt}$ et $\frac{dR}{dt}$. Justifier la forme approchée suivante du champ de vitesse du magma : $\vec{v} = v(r, z, t) \vec{u}_r$
- Montrer que la pression au sein du dôme est de la forme $p(r, z) = p_0 + \mu g [h(r) - z]$. En déduire l'ordre de grandeur du gradient horizontal de pression $\frac{dP}{dr}$ en fonction de μ, g, h_0 et R
- Exprimer de la même façon l'ordre de grandeur de la densité volumique des forces de viscosité $\eta \Delta \vec{v}$ en fonction de U, h_0 et η . Indiquer à quelle condition on peut négliger le terme convectif devant le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes. Justifier qu'en ordre de grandeur, $U \simeq \frac{dR}{dt}$. La condition précédente étant vérifiée, montrer que la relation

$$\frac{R}{h_0^3} \frac{dR}{dt} \sim \frac{\mu g}{\eta}$$

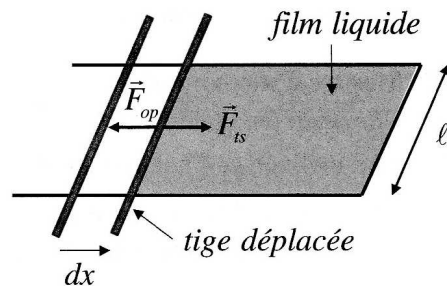
est vérifiée en ordre de grandeur.

5. Vérifier la cohérence avec la mesure des exposants p et q , et calculer un ordre de grandeur de la viscosité cinématique $\nu = \eta/\mu$ de la lave. Commenter.

Exercice 4 : Force de tension superficielle exercée sur une membrane

Cet exercice et le suivant abordent la notion de tension superficielle. Elle n'est au programme que de la partie TP de l'année de PC, et son expression n'est pas exigible : elle devrait être fournie dans un sujet d'écrit. Avant de faire ces deux exercices, il est conseillé de relire le TP « Mesure de viscosité et de tension superficielle ».

On forme une lame d'eau savonneuse sur un cadre rectangulaire dont un des côtés, dénommé la tige, est mobile. Que se passe-t-il lorsqu'on lâche la tige ? Pour obtenir l'expression de la force de tension superficielle \vec{F}_{ts} exercée par la membrane de fluide sur la tige, faire un raisonnement énergétique sur un déplacement élémentaire dx de la tige en faisant intervenir un opérateur qui exerce une force opposée \vec{F}_{op} afin que la tige se déplace de manière quasi statique ; pourquoi ? Exprimer \vec{F}_{ts} en fonction de γ , ℓ et ux ; commentaire.



Exercice 5 : (*) Loi de Laplace et équilibre d'une bulle de savon

On considère d'abord une goutte liquide sphérique, de rayon R , que l'on découpe par la pensée en deux demi-sphères égales ; on note P_e la pression atmosphérique qui règne à l'extérieur et P_i la pression à l'intérieur du liquide de la goutte, et γ le coefficient de tension superficielle.

Écrire les actions mécaniques auxquelles est soumise la partie supérieure, puis traduire son équilibre mécanique pour en déduire $P_i - P_e$ en fonction de γ et R .

Étendre ce résultat à une bulle de savon pour laquelle l'épaisseur du film d'eau est faible par rapport au rayon de la bulle (figure de gauche). Proposer une application numérique.

Application : Deux bulles de savon A et B sont reliées à l'aide d'un conduit robinet R fermé. Que se passe-t-il à l'ouverture du robinet ? (figure de droite)

