

Exercice 1

1. On mesure sur la photographie $h = 6,0 \text{ cm}$ et la vitesse moyenne est de l'ordre de $\frac{0,06}{0,104-0,040} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. La surpression hydrostatique sous le pied vaut $\Delta P = \mu gh$, d'où la force de pression $F_1 = S\mu gh$, où S est la surface du pied. On en déduit $F_1 \simeq 0,18 \text{ N}$.

Le poids de ce lézard est $mg = 0,21 \text{ N}$ et cette force de pression ne suffit pas pour éviter l'enfoncement du lézard dans l'eau.

3. Le nombre de Reynolds est $\text{Re} = \frac{v_m \ell}{\nu} = 2 \cdot 10^4$, où ℓ est la taille caractéristique du pied (quelques cm). L'écoulement est turbulent et la force de traînée exercée par l'eau sur le pied est quadratique, $F_2 = \frac{1}{2} S C_x \rho v_m^2$. On estime le coefficient de traînée à 1 et on en déduit $F_2 \simeq 0,15 \text{ N}$. Cette force est dirigée vers le haut (elle est opposée à la vitesse du pied).

4. Durant la phase de remontée du pied, l'eau ne s'étant pas encore refermée sur le pied, la force exercée par l'eau est négligeable. La force totale F est donc de l'ordre de $0,33 \text{ N}$ et s'exerce durant $\Delta t = 104 - 16 = 88 \text{ ms}$ sur un cycle de durée $\tau = 120 \text{ ms}$.

La force moyenne est donc $F_m = \frac{\Delta t}{\tau} F \simeq 0,24 \text{ N}$.

Cette force moyenne est supérieure au poids et permet donc l'avancée du lézard sans qu'il s'enfonce beaucoup dans l'eau.

5. L'eau se referme sur le pied car la pression dans l'eau est supérieure à la pression dans l'air. Les grandeurs pertinentes sont donc la demi-largeur L du trou d'eau, la hauteur du trou h , le champ de pesanteur et la masse volumique de l'eau. Les grandeurs $T = \sqrt{L/g}$ ou $T = \sqrt{h/g}$ sont homogènes à un temps (et correspondent à un temps de chute libre de l'eau se refermant sur le trou). Pour l'estimation du temps, on choisit une taille intermédiaire entre L et h , de l'ordre de 5 cm , d'où $T = 0,07 \text{ s}$.

Cet ordre de grandeur semble compatible avec la séquence où le trou se referme (entre les troisième et cinquième photographies, séparées de $0,08 \text{ s}$). Ce temps est de l'ordre de grandeur de la durée séparant l'entrée et la sortie du pied (de l'ordre de $0,05 \text{ s}$). Le lézard retire donc suffisamment vite son pied de l'eau pour qu'aucune force ne s'oppose à ce mouvement. Si l'eau s'était refermée sur le pied, celui-ci serait soumis à une force de traînée vers le bas qui compenserait F .

Exercice 2

1. Le champ de vitesse dépend du temps et de la cote z .

2. En développant le terme convectif $\overline{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overline{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}\vec{v} = v \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{=0}$, on se rend

compte qu'il vaut zéro. L'équation de Navier-Stokes conduit alors à $\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$: la pression

est donc constant à la profondeur z . On a aussi : $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \nu_c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$.

⚡ Ne pas confondre ν_c (la viscosité cinématique) et ν (la vitesse).

3. $i\omega \underline{f}(z) = v_c \frac{d^2 \underline{f}(z)}{dz^2}$, soit : $\frac{d^2 \underline{f}(z)}{dz^2} - \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 \underline{f}(z) = 0$.

Solution du type : $\underline{f}(z) = \underbrace{A_1 \cdot e^{(1+i)z/\delta}}_{\text{diverge}} + A_2 e^{-(1+i)z/\delta}$. A_1 doit être nulle car une solution divergente

n'est pas acceptable physiquement. De plus en $z = 0$, la vitesse du fluide doit être égale à la

vitesse de la plaque, donc $A_2 = v_0$, d'où $\vec{v}(z,t) = v_0 \underbrace{\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)}_{\text{atténuation}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}_{\text{propagation}} \vec{e}_x$.

4. A.N. : $\delta = 13 \text{ mm}$.

5. A.N. : $\delta = 5,6 \text{ cm}$ (à 1 Hz) ; $\delta = 1,8 \text{ cm}$ (à 10 Hz). Les ondes sismiques de cisaillement ne se propagent pas.

Exercice 3

1. Les deux courbes en échelle log-log sont des droites, d'où $\log R = p \log t + \log a$ et $R(t) = at^p$. On détermine les deux inconnues a et p à l'aide d'une régression linéaire,

$$a = 0,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-p} \quad \text{avec} \quad p = 0,42$$

De même, on détermine b et q à l'aide de deux points,

$$b = 5,3 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-q} \quad \text{avec} \quad q = -0,14$$

Compte tenu de l'incertitude de lecture sur les courbes, les valeurs obtenues peuvent être un peu différentes.

2. En dérivant l'expression de R , $\frac{dR}{dt} = pat^{p-1} = pR/t$. Si on prend les valeurs à $t = 1 \cdot 10^6 \text{ s}$, on obtient $\frac{dR}{dt} \simeq 8 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En dérivant h_0 , $\frac{dh_0}{dt} = qbt^{q-1} = \frac{qh_0}{t}$.

Avec les valeurs à $t = 1 \cdot 10^6 \text{ s}$, on obtient $\frac{dh_0}{dt} \simeq -9 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut négliger la vitesse verticale $\frac{dh_0}{dt}$ devant la vitesse radiale $\frac{dR}{dt}$: le champ de vitesse est principalement radial.

3. Comme on néglige la composante verticale du mouvement, l'équation de Navier-Stokes en projection sur \vec{u}_z se limite à $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g$.

On intègre par rapport à z , $P(r,z,t) = -\mu g z + f(r,t)$. Pour déterminer la fonction $f(r,t)$, on utilise la condition aux limites $P(r,h,t) = P_0 = -\mu g h + f(r,t)$, d'où

$$P(r,z) = P_0 + \mu g (h - z)$$

En dérivant, $\frac{dP}{dr} = \mu g \frac{dh}{dr}$, ce qui implique, en ordre de grandeur, $\frac{dP}{dr} \simeq \mu g \frac{h_0}{r}$.

4. Le laplacien comporte des dérivées secondes par rapport à z , de taille caractéristique h_0 , et des dérivées secondes par rapport à r , de taille caractéristique R . Comme $h^2 \ll R^2$, les termes dominants sont les dérivées secondes par rapport à z ,

$$\Delta \vec{v} \simeq \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \vec{u}_r, \quad \text{d'où} \quad \eta |\Delta \vec{v}| \simeq \frac{\eta U}{h_0^2}$$

On projette l'équation de Navier-Stokes sur \vec{u}_r (régime permanent),

$$\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta (\Delta \vec{v}) \cdot \vec{u}_r$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est faible, car l'écoulement est très visqueux (cette hypothèse pourra être vérifiée une fois la viscosité déterminée). Par construction

du nombre de Reynolds, cela revient à pouvoir négliger le terme d'accélération convective devant le terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes, $\frac{\partial P}{\partial r} = \eta(\Delta \vec{v}) \cdot \vec{u}_r$. En ordre de grandeur, on obtient : $\mu g \frac{h_0}{R} \simeq \eta \frac{U}{h_0^2}$. D'après la question 2, la vitesse caractéristique est $U \sim \frac{dR}{dt}$, d'où

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\mu g h_0^3}{R \eta} \quad (11.2.1)$$

5. On injecte dans l'équation (11.2.1) les expressions de R et h_0 ,

$$apt^{p-1} = \frac{\mu g b^3 t^{3q}}{\eta at^p} \Rightarrow t^{2p-1-3q} = \frac{\mu g b^3}{\eta a^2} \quad (11.2.2)$$

Comme t est variable et le second membre constant, cette équation est valable si $2p - 1 - 3q \simeq 0$. Or, avec les valeurs déterminées, on obtient $2p - 1 - 3q = 0,26$, ce qui n'est pas très petit. Une des hypothèses effectuées n'est pas bien vérifiée : la vitesse radiale n'est pas très grande devant la vitesse verticale (il y a seulement un facteur 10 entre les deux).

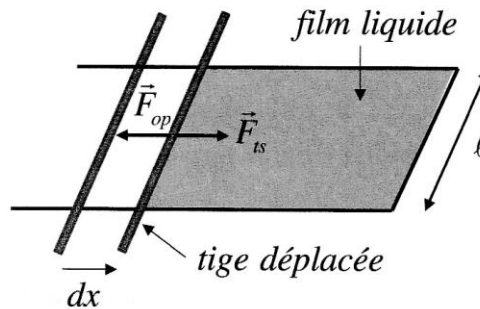
En supposant que $2p - 1 - 3q \simeq 0$, le membre de gauche de (11.2.2) vaut 1, donc, en ordre de grandeur,

$$\nu = \frac{\eta}{\mu} \sim \frac{gb^3}{a^2} \Rightarrow \nu \simeq 5 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Cette valeur est très élevée, ce qui est cohérent pour de la lave (on peut comparer à $\nu \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour de l'huile de cuisine à température ambiante, par exemple). Le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut $Re = \frac{UR}{\nu} \simeq 10^{-12}$. L'écoulement est donc très visqueux et il était légitime de négliger l'accélération convective devant le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes.

Exercice 4

Le film liquide cherchant à minimiser sa surface, il exerce sur la tige mobile une force de tension superficielle \vec{F}_{ts} dirigée vers \vec{u}_x . Sans autre action, la tige est mise en mouvement rectiligne uniformément accéléré en convertissant le travail reçu (l'énergie de tension superficielle du film diminue) en énergie cinétique.



Pour éviter cette conversion en énergie cinétique, on fait intervenir un opérateur qui exerce une force \vec{F}_{op} opposée afin que la tige se déplace de manière quasi statique :

- * avec $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ pour la tige, la RFD donne $\vec{F}_{ts} + \vec{F}_{op} = \vec{0}$, les deux forces sont opposées,
- * avec $E_c = cste$ pour la tige, le théorème de l'énergie cinétique sur un déplacement dx élémentaire donne $dE_c = \delta W_{op} + \delta W_{ts} = 0$, les travaux élémentaires des forces sont opposés. Et donc en l'absence de variation d'énergie cinétique, le travail de l'opérateur s'identifie à la variation d'énergie potentielle du film (même raisonnement qu'en électrostatique à la question 27. du chapitre 7) : $\delta W_{op} = -\delta W_{ts} = dE_{ts}$ en lien avec la question 32.

Attention, le film présente deux interfaces liquide / gaz (l'une sur le haut, l'autre sur le bas), on a donc ici $E_{ts} = 2\gamma S$; la surface est $S(x) = S_0 - \ell x$, d'où :

$$-\delta W_{ts} = dE_{ts} \Rightarrow -F_{ts} \cdot dx = 2\gamma(-\ell dx) \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ts} = 2\gamma\ell \vec{u}_x} \text{ et } \vec{F}_{op} = -2\gamma\ell \vec{u}_x$$

Il apparaît que le coefficient γ de tension superficielle a la dimension d'une force par unité de longueur, c'est la raison pour laquelle on préfère souvent l'exprimer en $N.m^{-1}$ plutôt qu'en $J.m^{-2}$.

Rq : Avec $\gamma = 73.10^{-3} N.m^{-1}$, la réduction d'un film d'eau de $1 m^2$ permet de récupérer $E_{ts} = 2\gamma S \approx 0,15 J$, de quoi élever de 10 cm une petite pomme de 150 g !

En résumé :

La tension superficielle γ d'un liquide est une grandeur caractéristique qui mesure le coût énergétique de création d'interface liquide / air.

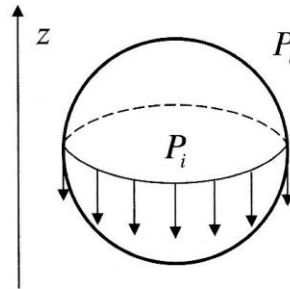
Les forces de tension superficielle ou forces capillaires (d'un film sur un contour par exemple) tendent à minimiser l'aire du film, sont orthogonales en chaque point au contour et sont tangentes à l'interface.

Dans les deux descriptions, un tel film se comporte comme une membrane élastique tendue.

Exercice 5

La moitié supérieure de la goutte est soumise aux actions mécaniques suivantes :

- la résultante des forces de pression extérieure sur une demi-sphère : $-P_e \pi R^2 \vec{u}_z$ car $\int_{1/2 \text{ sphère de rayon } R} dS \cos \theta = \pi R^2$
- la résultante des forces de pression intérieure sur le disque équatorial : $P_i \pi R^2 \vec{u}_z$
- la résultante des forces de tension superficielle qu'exerce la partie inférieure sur la partie supérieure (force attractive suivant la ligne de contact) et tangente à l'interface : $-\gamma 2\pi R \vec{u}_z$

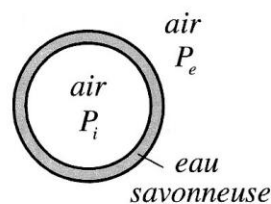


L'équilibre s'écrit :

$$P_i \pi R^2 \vec{u}_z - P_e \pi R^2 \vec{u}_z - \gamma 2\pi R \vec{u}_z = \vec{0} \text{ soit } P_i - P_e = \frac{2\gamma}{R} > 0$$

Pour une bulle de savon, ce sont deux interfaces très rapprochées qui forment la membrane de la bulle :

$$\boxed{P_i - P_e = \frac{4\gamma}{R}}$$



Le résultat $P_i > P_e$ se comprend aisément : la membrane d'eau savonneuse se comporte comme un ballon de baudruche étiré, nécessitant pour maintenir l'équilibre une surpression de l'intérieur par rapport à l'extérieur.

AN : Pour $R = 3 \text{ cm}$, $P_i - P_e \approx 10 \text{ Pa} = 10^{-4} \text{ bar}$, insignifiant ; pour $R = 10 \mu\text{m}$, $P_i - P_e \approx 0,3 \text{ bar}$, notable.

Application : Après ouverture du robinet R c'est la petite bulle qui se vide dans la grande car $R_B < R_A \Rightarrow P_B > P_A$, l'équilibre n'est pas possible ; avec des bulles de rayon identique, l'équilibre est instable !

