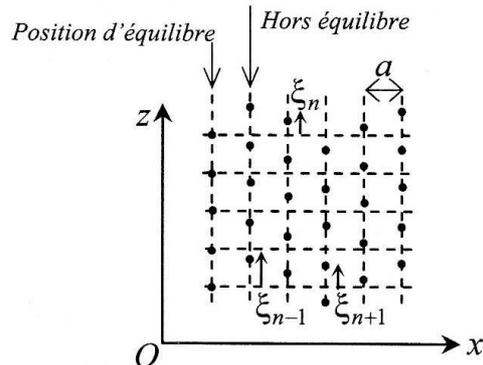


Exercice 1 : (*) Ondes transversales dans un cristal

On étudie ici les ondes élastiques se propageant suivant l'axe (Ox) d'un solide cristallin dans le domaine des courtes longueurs d'onde. Pour simplifier le problème, on s'intéresse aux vibrations élastiques purement transversales de plans atomiques parallèles supposés identiques. On réduit le problème à deux dimensions dans un plan réticulaire (O, x, z) de la maille et on note a la distance entre deux plans successifs. On suppose qu'au passage de l'onde transverse, chaque plan se déplace en bloc dans la direction orthogonale à (Ox) . On note alors ξ_n l'écart du $n^{\text{ième}}$ plan de masse M à sa position d'équilibre. On admet pour simplifier le plan de rang n est soumis de la part de chacun de ses plus proche voisin à une force de rappel élastique de la forme : $\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = C(\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)) \vec{e}_z$.



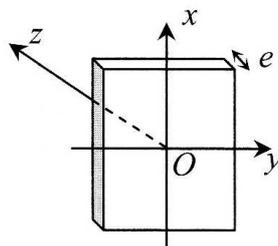
1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle du déplacement du plan de rang n .
2. On cherche des solutions de la forme $\xi_n = A \exp(i(nka - \omega t))$ où $\vec{k} = k\vec{e}_x$ est le vecteur d'onde et ω la pulsation. Écrire la relation de dispersion entre k et ω . On écrira cette relation sous la forme $\omega = f(k, a, \omega_0)$ avec $\omega_0^2 = \frac{C}{M}$. Commenter.
3. Montrer que deux solutions pour lesquelles k diffère de $2\pi/a$ représentent le même état physique et que l'on peut limiter le domaine de variation des valeurs de k à $]-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}[$. Tracer dans ce domaine l'allure de la courbe donnant ω en fonction de k . Montrer que le cristal se comporte comme un filtre passe-bas dont on déterminera la fréquence de coupure ω_c .
4. Calculer la vitesse de phase V_φ et la vitesse de groupe V_g en fonction de k, ω_0 et a , sur l'intervalle $k \in]0, \frac{\pi}{a}[$. Donner leurs limites pour ka tendant vers 0 et ka tendant vers π . Commenter.

Exercice 2 : lame à retard

On appelle lame à retard une lame à faces parallèles d'épaisseur e , taillée dans un matériau anisotrope supposé transparent, dont la maille cristalline possède une symétrie de révolution autour d'un axe Δ . On admet que de ce fait la permittivité diélectrique du milieu ainsi que l'indice optique ont deux valeurs différentes :

- dans la direction parallèle à Δ l'indice vaut $n = n_o$ (indice dit *ordinaire*).
- dans la direction orthogonale à Δ l'indice vaut $n = n_e$ (indice dit *extraordinaire*)

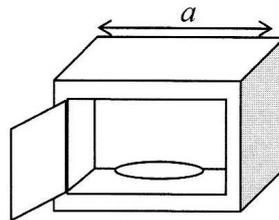
On suppose que la lame a été taillée de sorte que ces deux directions privilégiées, dites lignes neutres de la lame, sont contenues dans un plan parallèle à sa face et sont telles que suivant l'axe (Ox) $n = n_o$ et suivant l'axe (Oy) $n = n_e$.



- On suppose que le milieu est tel que $n_e > n_o$. Justifier alors la dénomination d'axe rapide pour l'axe (Ox) et d'axe lent pour (Oy) .
- Une OPPM de phase $\Phi = \omega t - kz + \varphi$, polarisée rectilignement par un polariseur dichroïque dont l'axe de polarisation fait avec l'axe (Ox) un angle $\alpha < \pi/2$, tombe en incidence normale sur la lame.
 - Donner l'expression du champ électrique incident \vec{E}_i sur la lame pour z quelconque puis en $z = 0$, ainsi que celle du champ électrique émergent \vec{E}_e pour $z = e$ puis pour $z > e$.
 - Pour une onde de longueur d'onde λ_0 dans le vide et un matériau anisotrope donné dont la différence $n_e - n_o$ est fixée, comment faut-il tailler la lame pour réaliser un déphasage de π entre les deux composantes du champ émergent ? On parle alors de lame demi-onde : justifier clairement cette terminologie. Quelle est alors la polarisation du champ émergent ?
 - Quelle est l'action d'une telle lame sur une onde de polarisation circulaire ?
- Sous quelles conditions la lame est-elle dite quart d'onde ? Étudier son action sur une onde incidente dont la polarisation est rectiligne ou circulaire.
- Dresser un tableau récapitulatif de l'action des lames demi-onde et quart d'onde sur les états de polarisation rectiligne et circulaire.

Exercice 3 : Champs électrique dans un four « micro ondes »

Considérons le champ électrique associé à l'onde électromagnétique (générée par un magnétron) régnant dans un « four micro-ondes » entre les plans conducteurs formant les parois intérieures distantes de a .



Réduisons le problème à une dimension. On admet que le champ électrique devant un plan conducteur localisé en $z = 0$, dans la limite d'une épaisseur de peau nulle, est de la forme $\vec{E}_{\text{total}} = E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x$. On envisage à présent la possibilité de confiner ce champ entre le plan, conducteur d'épaisseur de peau nulle de dimensions transversales considérées ici infinies en $z = 0$ et un autre plan de même nature localisé en $z = -a$

- Montrer qu'il existe un nœud de vibration sur les surfaces en $z = -a$ et $z = 0$.
- Montrer alors que seuls les modes vibratoires tels que $\lambda_n = \frac{2a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (dits modes propres de la cavité) peuvent exister dans la cavité.
- Donner les longueurs d'onde des trois premiers modes propres et tracer leur allure.
- Donner l'expression du champ magnétique dans le four en régime d'onde (c'est-à-dire sans champ statique).
- Exprimer alors le vecteur de Poynting instantané dans la cavité et vérifier qu'il a une structure d'onde stationnaire. De quelle distance sont séparés deux nœuds de vibration successifs ? Commenter.
- Le chauffage par micro-ondes se fait par transfert d'énergie électromagnétique en énergie thermique : le champ électrique variable agit sur les dipôles permanents des molécules d'eau qui, pour suivre les oscillations du champ, se mettent en rotation, « frottant » ainsi sur leur environnement et dissipant l'énergie que leur a cédé le champ par le biais du vecteur de Poynting. Pourquoi est-il nécessaire de faire tourner l'aliment sur un plateau lors de sa cuisson ?

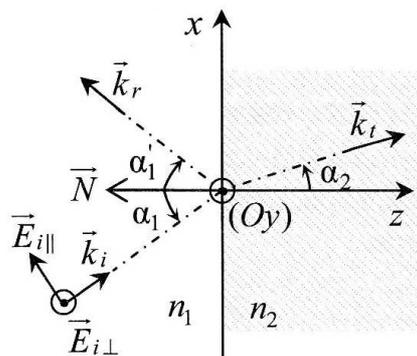
Exercice 4 : (*) Polarisation à l'angle de Brewster

Avant de faire cette exercice, faire une recherche rapide sur internet pour comprendre la notion de milieu diélectrique LHI (linéaire, homogène et isotrope).

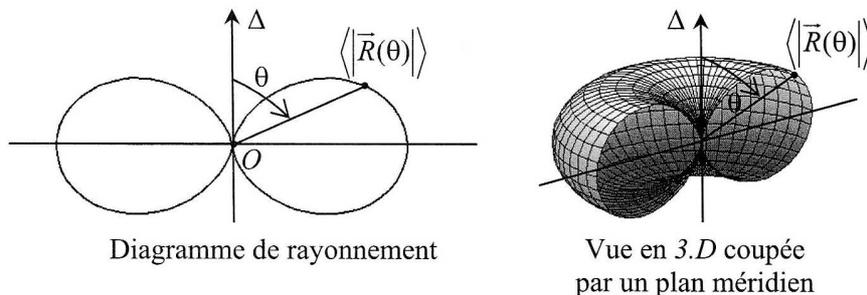
Un rayon lumineux tombe en incidence à priori quelconque sur l'interface, supposée plane et confondue avec le plan (O, x, y) , séparant l'air d'indice n_1 d'un diélectrique LHI d'indice n_2 . On associe à cette lumière naturelle incidente une OPPM non polarisée que l'on représente par un champ électrique comportant deux composantes polarisée rectilignement, orthogonales entre elles, de même amplitude, et dont le déphasage $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ varie de façon aléatoire au cours du temps. Décomposons le champ incident dans une base $(\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_{\perp})$, où \vec{e}_{\parallel} est un vecteur unitaire compris dans le plan d'incidence et \vec{e}_{\perp} un vecteur unitaire orthogonal à ce plan :

$$\vec{E}_i \begin{cases} \vec{E}_{i\parallel} = E_{0\parallel} \exp(i(\omega t - k_i z + \varphi_x)) \vec{e}_{\parallel} \\ \vec{E}_{i\perp} = E_{0y} \exp(i(\omega t - k_i z + \varphi_y)) \vec{e}_y \end{cases}$$

Son vecteur d'onde \vec{k}_i fait un angle α_1 avec la normale \vec{N} à l'interface. Ce champ met en mouvement oscillant les charges liées au voisinage de la surface dans le diélectrique à la même pulsation ω que celle du champ.



On admet qu'une charge en mouvement oscillant suivant un axe Δ autour d'un point O est la source d'un rayonnement anisotrope (dit rayonnement dipolaire), nul suivant l'axe Δ et maximal dans le plan équatorial perpendiculaire à cet axe. L'onde rayonnée est supposée localement plane et en coordonnées sphérique de centre O le vecteur de Poynting rayonné est radial. La norme du vecteur de Poynting moyen en fonction de l'angle polaire θ donne le diagramme de rayonnement suivant :



Ce rayonnement est ainsi la source d'une onde transmise dans le milieu 2, dite onde réfractée, à laquelle on associe le champ $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp(i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}))$, ainsi qu'une onde réfléchiée dans le milieu 1, à laquelle on associe le champ $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp(i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}))$. On note alors respectivement α'_1 et α_2 les angles que font, avec la normale, les vecteurs d'onde \vec{k}_r et \vec{k}_t des ondes respectivement réfléchiée et réfractée.

1. Dans quelle mesure la notion d'onde plane dans le domaine optique vous paraît-elle pouvoir remplacer le concept de rayon lumineux se propageant en ligne droite dans un diélectrique LHI ? Que dire de l'hypothèse de planéité de la surface du diélectrique ?
2. On ne s'intéresse pour l'instant qu'à la réflexion-réfraction de la composante $\vec{E}_{i\parallel}$ du champ incident, parallèle au plan d'incidence.
 - (a) Justifier qu'au voisinage de la surface dans le milieu diélectrique de transmission, les charges liées excitées par le champ incident oscillent dans une direction perpendiculaire au vecteur d'onde transmis \vec{k}_t (et non, comme on pourrait faussement l'imaginer, à \vec{k}_i).
 - (b) On suppose que les lois de Descartes pour la réfraction s'appliquent formellement à la situation. Monter en utilisant le caractère anisotrope du rayonnement décrit dans l'énoncé que pour une certaine valeur de l'angle d'incidence noté α_B , dit angle d'incidence Brewster, le rayon réfléchi est totalement éteint. Donner l'expression de α_B en fonction de n_1 et n_2 .
A.N. : évaluer l'angle de Brewster à l'interface entre l'air et le verre $n_1 = 1$ et $n_2 = 1,5$.
3. Ce phénomène existe-t-il pour la composante orthogonale $\vec{E}_{i\perp}$ du champ incident ? En déduire l'état de polarisation de la lumière naturelle après réflexion à l'incidence Brewster.
4. En assimilant localement la surface de la glace à celle du diélectrique étudié ici, interpréter qualitativement l'intérêt des lunettes de glacier à verre polarisants.

Exercice 5 : (*) Particule confinée dans un double puits symétrique

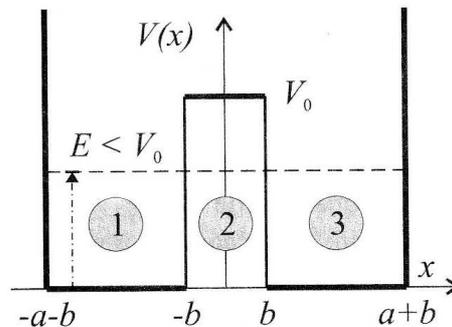
Une particule de masse m évolue dans un double puits de potentiel décrit de la façon suivante :

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ pour } |x| > b + a$$

$$V(x) = 0 \text{ pour } -a - b \leq x \leq -b, \text{ région (1)}$$

$$V(x) = V_0 \text{ pour } |x| < b, \text{ région (2)}$$

$$V(x) = 0 \text{ pour } b \leq x \leq b + a, \text{ région (3)}$$



L'étude est limitée au cas $E < V_0$ et la fonction d'onde stationnaire de la particule d'énergie E est cherchée sous la forme $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

1. Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction $\varphi(x)$ dans les différentes régions (utiliser les notations $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ pour distinguer ces différentes régions).
2. Établir alors les expressions $\varphi_1(x) = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx}$, $\varphi_2(x) = A_2e^{\alpha x} + B_2e^{-\alpha x}$ et $\varphi_3(x) = A_3e^{ikx} + B_3e^{-ikx}$. Écrire le système linéaire vérifié par ces coefficients A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , A_3 et B_3 . La parité du potentiel, et donc de la densité de probabilité $|\psi|^2$, permet d'affirmer que les fonctions $\varphi(x)$ décrivant les états stationnaires de la particule sont pairs (modes symétriques) ou impairs (modes antisymétriques).
3. Établir pour les états symétriques la relation reliant les grandeurs k et α . Puis celle reliant les variables adimensionnées $u = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}$, $\xi = ka$ et $q = \frac{b}{a}$. Montrer, à l'aide d'un tracé réalisé dans les cas $(u, q) = (100, 1)$ puis $(u, q) = (100, 0.1)$, qu'il y a quantification des niveaux d'énergie de la particule.

4. Établir pour les états antisymétriques la nouvelle relation reliant les grandeurs k et α , puis celle reliant u , ξ et q . Montrer, à l'aide d'un tracé réalisé dans les cas $(u, q) = (100, 1)$ puis $(u, q) = (100, 0.1)$, qu'il y a quantification des niveaux d'énergie de la particule.
5. L'état fondamental est-il symétrique ou antisymétrique ? Cet état existe-t-il toujours ?
6. Calculer pour un électron, dans le cas où $a = 2b = 0,2$ nm et $V_0 = 20$ eV, les valeurs numériques des deux paramètres u et q . Déterminer ensuite les valeurs numériques des deux premiers niveaux d'énergie notés E_s et E_A . Comparer ces valeurs à celles des deux premiers niveaux d'énergie d'un électron confiné dans un puits infini de largeur a .