Exercice 1

1. À l'œil nu, un objet à une distance d_m et de taille ℓ est vu sous l'angle α_m tel que : $\tan \alpha_m = \dfrac{\ell}{d_m}$ avec $\tan \alpha_m \simeq \alpha_m$ dans l'approximation de Gauss. Alors : $\alpha_m = \dfrac{\ell}{d_m}$.

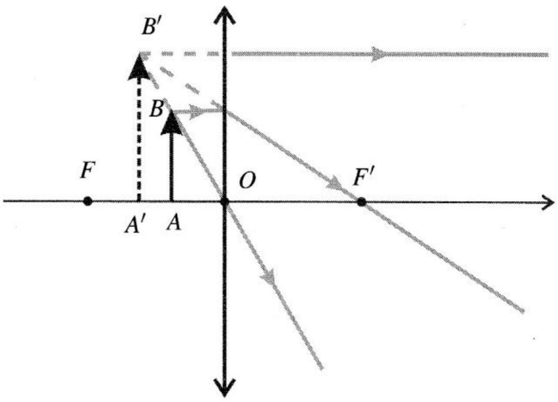
2.

a. La lentille est utilisée en loupe, donc l'objet est placé entre le foyer objet F et le centre optique O. On note $x = \overline{OA}$ et $y = \overline{OA'}$, A' étant l'image de A. La relation de conjugaison de Descartes donne : $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$ d'où $y = \dfrac{xf'}{f'+x}$.

On note O_b la position de l'œil de l'observateur. Pour que l'image soit vue nette il faut que : $O_bA' \geq d_m$, soit en valeur algébrique : $-a + y \leq -d_m$.

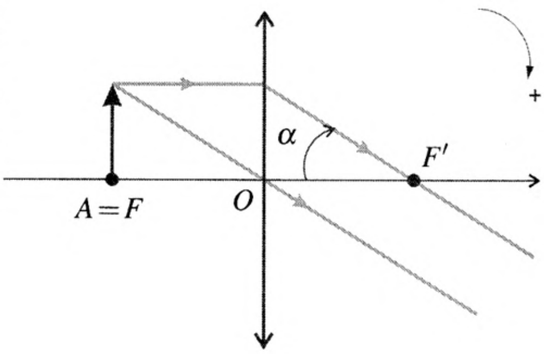
Avant de chercher l'intervalle des positions x de l'image, il faut connaître les variations de y en fonction de x. On calcule la dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(f'+x)^2}(f'(f'+x) - xf') = \dfrac{(f')^2}{(f'+x)^2}$. Elle est positive donc y est une fonction croissante de x : à l'objet le plus proche correspond l'image la plus proche, et à l'objet le plus lointain ($A = F$) correspond l'image la plus lointaine (à l'infini).

L'objet le plus proche vu net par l'œil est tel que $y = a - d_m$, soit : $\dfrac{1}{a-d_m} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$ d'où $x = \dfrac{f'(a-d_m)}{f'-a+d_m}$. En conclusion, la zone possible pour les objets donnant une vision nette est l'intervalle $\left[-f' \,;\, \dfrac{f'(a-d_m)}{f'-a+d_m}\right]$.



b. L'œil n'accommode pas si l'image A' est à l'infini, donc l'objet doit être dans le plan focal de la lentille : $A = F$. D'après la figure ci-contre : $\tan\alpha \simeq \alpha = \dfrac{\ell}{f'}$. On déduit de ce qui précède le grossissement commercial de la loupe :

$$G = \frac{\alpha}{\alpha_m} = \frac{\ell}{f'}\frac{d_m}{\ell} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{d_m}{f'} = 5.$$



Exercice 2

a) $\lambda_0 = 0{,}5\ \mu\text{m}$ correspond à du vert (un peu bleu) ; $\nu_0 = c/\lambda_0 = 6.10^{14}$ Hz. L'émission de lumière lors d'une transition électronique dans un atome est un phénomène de durée limitée. Si τ_0 est la durée des trains d'onde émis, la longueur de cohérence liée à la largeur naturelle est la longueur spatiale de ce train d'onde soit $L_c = c\tau_0$ d'où $\tau_0 = 10^{-8}\ \text{s} = 10\ \text{ns}$.

La largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ à mi-hauteur de la raie (non totalement monochromatique) est liée à τ_0 par la relation $\tau_0\Delta\nu = 1$ soit $\Delta\nu = 10^8\ \text{Hz} = 0{,}1\ \text{GHz}$. Son facteur de qualité est $Q = \nu_0/\Delta\nu \approx 6.10^6$, ce qui considérable (la raie est très fine !).

Avec $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu_0}$, on a au signe près, $\Delta\lambda = \dfrac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} = \dfrac{\lambda_0^2\Delta\nu}{c} \approx 10^{-13}\ \text{m} \ll \lambda$.

b) La vitesse quadratique moyenne u d'une molécule de masse m est donnée par :
$\dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{3}{2}k_BT$, soit puisque $N_Ak_B = R$ et $N_Am = M$: $u = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}} \approx 430\ \text{m.s}^{-1}$

La largeur Doppler est alors $\Delta\nu' = \nu_0\left(1+\dfrac{u}{c}\right) - \nu_0\left(1-\dfrac{u}{c}\right) = 2\dfrac{u}{c}\nu_0 \approx 1{,}7$ GHz ; on note qu'elle est bien supérieure à la largeur naturelle : $\Delta\nu' \approx 17\Delta\nu$ d'où une diminution du facteur de qualité à $Q' = 4.10^5$ (tout de même !).

On en déduit $\tau' = 1/\Delta\nu' \approx 0{,}6$ ns et $L_c' = c\tau' \approx 18$ cm, ce qui est déjà beaucoup. En tenant compte des collisions, on trouve plutôt expérimentalement quelques mm ce qui est bien l'ordre de grandeur de la différence de marche sur laquelle l'affaiblissement du contraste avec un interféromètre de Michelson est notable. Par ailleurs $\Delta\lambda' \approx 17\Delta\lambda \approx 10^{-12}$ m.

Exercice 3

1. La différence de marche peut être définie comme : $\delta = 2n\Big((S_1P) - (S_2P)\Big)$, le facteur 2 tenant compte de l'aller-retour. Partant de $\overrightarrow{S_2P} = \overrightarrow{S_2S_1} + \overrightarrow{S_1P}$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_2P^2 &= S_1P^2 + 2\overrightarrow{S_2S_1}\cdot\overrightarrow{S_1P} + S_1P^2, \\ &= R^2\left(1 + \frac{2\overrightarrow{S_2S_1}\cdot\overrightarrow{S_1P}}{R^2} + \frac{S_1S_2^2}{R^2}\right). \end{aligned}$$

En se limitant à des termes du premier ordre en S_1S_2/R, on obtient : $S_2P \simeq R + \dfrac{\overrightarrow{S_2S_1}\cdot\overrightarrow{S_1P}}{R}$.

Comme $S_1P = R$, on en déduit le résultat demandé : $\delta = 2n\dfrac{\overrightarrow{S_1S_2}\cdot\overrightarrow{S_1P}}{R}$.

2. Avec $\overrightarrow{S_1S_2} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y + d\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{S_1P} = x\vec{u}_x - H\vec{u}_z$, on obtient : $\delta = \dfrac{2n}{R}(ax - dH)$.
L'éclairement est donné par la formule de Fresnel :

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0})\right) = 2\mathscr{E}_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{2nax}{\lambda_0 R} - 2\pi\frac{2ndH}{\lambda_0 R}\right)\right).$$

L'éclairement ne dépend que de l'abscisse x : on obtient des franges d'interférences rectilignes. L'interfrange correspond à la période spatiale de l'éclairement : $i = \dfrac{\lambda_0 R}{2na}$. Numériquement, on obtient $i = 46,6$ m.

3. a. On reprend le calcul de la différence de marche précédente avec $\overrightarrow{S_1P} = x\vec{u}_x + (z - H)\vec{u}_z$. On obtient $\delta = \dfrac{2n}{R}(ax + d(z-H))$. Avec $z = x\tan\alpha \simeq x\alpha$, il vient : $\delta = \dfrac{2n}{R}((a + \alpha d)x - Hd)$. Le nouvel interfrange s'écrit $i' = \dfrac{\lambda_0 R}{na + nd\alpha}$. Dans l'hypothèse où $\alpha \ll 1$, on obtient $i' = \dfrac{\lambda_0 R}{na}\left(1 - \dfrac{\alpha d}{a}\right)$. La variation relative de l'interfrange $\dfrac{i'-i}{i}$ est proportionnelle à α : $\dfrac{i'-i}{i} = -\alpha\dfrac{d}{a}$, et permet d'accéder à la valeur de α.

Exercice 4

a) En F_2' on observe un point qui « clignote » car les anneaux s'y engouffrent ou y naissent et donc le centre est alternativement clair ou sombre.

$I(x) = 2I_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi\delta(x)}{\lambda}\right)$ avec $\delta(x) = 2x$ et $x = vt$ d'où :

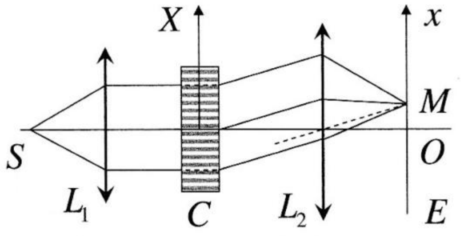
$$\boxed{I(t) = 2I_0\left(1 + \cos\frac{4\pi vt}{\lambda}\right)}$$

b) En écrivant $I(t) = 2I_0\left(1 + \cos\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$, on en déduit la période $T_0 = \dfrac{\lambda}{2v}$ qui dépend de la longueur d'onde et est d'autant plus petite (le centre clignote rapidement) que la vitesse du chariot est grande.

$T_0 = 0,341$ ms n'est pas observable (bien plus petit que le temps de réponse de l'œil), mais mesurable avec un fréquencemètre ($f_0 = 1/T_0 = 2,93$ kHz) ou un logiciel adapté sur ordinateur et recevant le signal électrique délivré par une photodiode ou un photomultiplicateur éclairé en F_2'.

On en déduit $\underline{\lambda = 2vT_0 = 546 \text{ nm}}$ (raie verte du mercure).

Exercice 5



Le système d'ondes stationnaires acoustiques créé dans la cuve à eau C agit sur le faisceau lumineux comme un réseau plan si la cuve est assez fine. La fréquence très élevée de ces ondes ultrasonores de longueur d'onde λ_a conduit à une distribution d'indice quasi périodique (alternance d'un grand nombre de ventres et de nœuds de vibration selon l'axe X) de pas $a = \lambda_a$ très faible.

En effet l'indice de réfraction de l'eau (auquel est sensible l'onde lumineuse) n'est plus homogène car modulé spatialement par les variations de masse volumique induites par les ondes stationnaires acoustiques ; et il faut bien noter qu'à une date donnée, deux ventres consécutifs de surpression correspondent respectivement à un minimum et à un maximum de masse volumique en fonction de l'abscisse le long de l'arête !

Étant donné que la fréquence de l'onde ultrasonore est beaucoup plus faible que la fréquence optique, l'onde lumineuse est diffractée par un réseau de phase qui lui semble « figé », le pas a de ce réseau est égal à la longueur d'onde acoustique :

$$a = \lambda_a = \frac{c_a}{f_a}$$

(c_a est la célérité des ondes ultrasonores dans l'eau).

La lumière est diffractée par ce réseau sinusoïdal dans les trois ordres p habituels -1, 0 et 1.

La formule du réseau (en réalité sinusoïdal) s'applique à la lumière diffractée :

$$\sin\theta_p = \sin\theta_0 + p\frac{\lambda}{a}$$

où $\theta_0 = 0$ (incidence nulle), $\lambda = \lambda_0 / n$ la longueur d'onde de la lumière dans l'eau et p l'ordre de diffraction qui ne prend que les valeurs -1, 0 et 1.

Sur l'écran E, l'abscisse du maximum de lumière d'ordre p est :

$$x_p = f'\tan\theta_p \approx f'\sin\theta_p = p\frac{\lambda f'}{a} = p\frac{\lambda_0 f' f_a}{nc_a} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = |\, x_{\pm 1} - x_0 \,| = \frac{\lambda_0 f' f_a}{nc_a}$$

On en déduit :

$$\boxed{c_a = \frac{\lambda_0 f' f_a}{n\Delta x} \approx 1\,400 \text{ m.s}^{-1}}$$

Le pas du réseau acoustique vaut ainsi $a \approx 0{,}1$ mm, ce qui confirme la possibilité de diffraction par la lumière et justifie *a posteriori* l'emploi d'une onde ultrasonore de fréquence élevée.