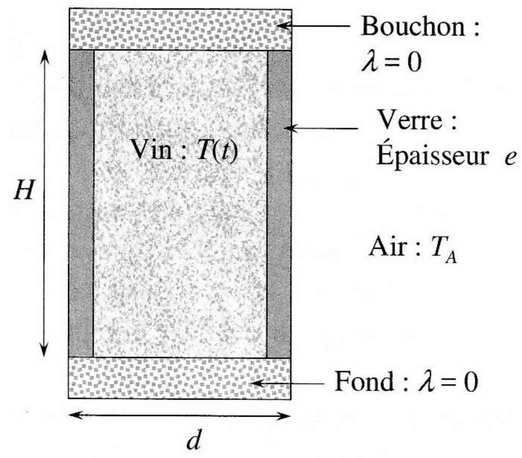
Exercice 1 : Mise en chambre d'un vin en bouteille

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de $T_0 = 8°C$, est mise en « chambre » dans la cuisine dont la température vaut $T_A = 22°C$.

La bouteille est assimilée à un cylindre de hauteur $H = 19,5$ cm, de diamètre extérieur $d = 7,6$ cm et d'épaisseur $e = 3$ mm. Dans cette modélisation les échanges thermiques entre l'extérieur et le vin se font uniquement par la surface latérale de la bouteille.

Par ailleurs la température $T(t)$ du vin est supposée uniforme, mais dépend lentement du temps ; celle du verre, en revanche, est fonction de r (distance à l'axe des coordonnées cylindriques) et le régime est quasi stationnaire.

Données : conductivité du verre $\lambda = 0,78 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; coefficient d'échange convectif $h = 10$ U.S.I. ; capacité thermique massique du vin $c = 4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



1. Calculer le volume V (en cL) de vin dans la bouteille et commenter.
2. Quel est le signe du flux thermique Φ qui traverse la bouteille (la surface latérale est orientée vers l'extérieur, suivant $\overrightarrow{u_r}$) ? Calculer la résistance thermique R_{cond} de conduction de la partie latérale de la bouteille, en notant T_S la température en surface de la bouteille. Faire l'application numérique.
3. L'échange thermique par convection entre l'air ambiant et la bouteille est bien représenté par la loi de Newton : $\varphi = hS\,(T_S - T_A)$ où le coefficient d'échange thermique h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface S et φ est le flux thermique dans l'air. Quelle est l'unité de h ? De quelles grandeurs et de quels phénomènes physiques dépend ce coefficient ? Exprimer la résistance thermique de convection R_{conv} de la surface latérale de la bouteille en fonction des seules données. Faire l'application numérique.
4. Comparer les deux flux Φ et φ. En déduire la valeur numérique de la résistance thermique totale R_{th} d'échange entre l'air extérieur et le vin et commenter.
5. Écrire le bilan énergétique du vin entre deux instants infiniment voisins t et $t + dt$ en notant $C = mc$ la capacité thermique totale du vin. En déduire une équation différentielle vérifiée par $T(t)$. Il y apparaît une constante de temps τ : quelle est sa signification et sa valeur numérique ?
6. Résoudre cette équation avec la condition initiale proposée. Indiquer l'allure du graphe $T(t)$. Proposer un schéma électrique équivalent en pensant à indiquer T, T_S et T_A.
7. AN 1 : Calculer le temps nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation $T_D = 16°C$.
   AN 2 : Quelle est à cet instant la température de surface T_s de la bouteille ? Commenter.

Exercice 2 : Taille des mammifères marins
Les mammifères sont des animaux à sang chaud dont la température reste constante. Pour maintenir leur température constante, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique a. La puissance totale créée par le mammifère est notée $\mathscr{P}$. Les mammifères sont décrits comme des sphères de rayon R, plongés dans de l'eau de conductivité thermique λ et de température à l'infini T_∞ (c'est-à-dire loin des animaux).

1. Établir l'équation de la diffusion thermique dans l'eau. On procédera à un bilan d'énergie en coordonnées sphériques.
2. Calculer la température $T(r)$ de l'eau autour d'un mammifère, en fonction de $\mathscr{P}$, λ, r et T_∞. En déduire la température T_C de l'eau au contact de l'animal.
3. Établir l'expression de la puissance thermique perdue par le mammifère en $r = R$, en fonction de λ, T_C, T_∞ et R. Expliquer alors pourquoi il n'existe pas de petit mammifère marin. Ce raisonnement est-il valable pour les mammifères terrestres ?

Exercice 3 : $(*)$ Température dans le sol
Le sol terrestre est localement assimilé à un demi-espace ($x > 0$) homogène de masse volumique $\rho = 3,1.10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, de capacité thermique massique $c = 870$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot^\circ$ C^{-1} et de conductivité thermique $\lambda = 1,8$ W.m^{-1} $\cdot^\circ$ C^{-1}.
$T(x,t)$ représente la température dans le sol à la date t et à la profondeur x.
On suppose que la température à la surface du sol ($x = 0$) évolue au cours de l'année suivant la loi :

$$T(0,t) = T_0 + a\cos\omega t \quad \left(\text{ avec } a \text{ constant et } T' = 2\pi/\omega = 1 \text{ an }\right)$$

et qu'à grande profondeur, la température du sol tend vers la moyenne annuelle :

$$T(\infty,t) = T_0.$$

1. En posant $T(x,t) = T_0 + u(x,t)$, chercher une solution en régime forcé sous la forme $\underline{u}(x,t) = \underline{f}(x)e^{i\omega t}$. Introduire $\delta = \sqrt{2\lambda/\rho c\omega}$ et donner $T(x,t)$ en fonction de T' et $\lambda' = 2\pi\delta$; commenter cette solution. Quelle est la vitesse de phase v_φ ? AN : Calculer δ, λ' et v_φ.
2. En $x = 0$: au 1$^{\text{er}}$ janvier $T_{\min} = -10$°C et au 1$^{\text{er}}$ juillet $T_{\max} = 30$°C. Vers quelle date la température est-elle minimale à la profondeur $x = 2$ m et quelle est cette valeur ? Tracer les graphes superposés de $T(0,t)$ et de $T(x = 2\text{ m}, t)$ et les commenter.
3. Estimer l'effet sur $T(x = 2\text{m}, t)$ des variations de température journalières.

Exercice 4 : $(*)$ Bombe nucléaire (d'après Centrale)
L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes. Le plus répandu à l'état naturel, U^{238}, possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est U^{235}, dit isotope fissile. Lorsqu'un noyau est heurté par un neutron (noté n), il peut fissionner, suivant la réaction :

$$U_{92}^{235} + n \to X + Y + \text{ neutrons } + \text{ énergie}$$

où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.
Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d'U ^{235} est $v = 2,5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'U^{235} est en moyenne de 170 MeV. Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

1. Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d'U ^{235} ?

2. L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4,2.10^9$ J. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d'U^{235}, exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.
3. Soit $n(M,t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et j_{th} le vecteur densité de flux de neutrons. L'équation fondamentale de la neutronique est :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div} \overrightarrow{\jmath} + \frac{v-1}{\tau} n.$$

   (a) Interpréter les deux termes situés à droite de l'égalité.
   (b) Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?
   (c) Expliquer pourquoi $v-1$ intervient dans le terme de droite, et non v.
4. On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive. On étudie une sphère d'uranium 235 pur, de rayon R. La diffusion des neutrons dans cette sphère est radiale et s'effectue avec un coefficient de diffusion D. Dans cette géométrie :

$$\Delta n = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rn).$$

   On cherche dans le cas général une solution de la forme : $n(r,t) = f(r)g(t)$.
   (a) Montrer que g est de la forme : $g(t) = g_0 \mathrm{e}^{at}$, où a et g_0 sont des constantes qu'on ne demande pas de calculer. Quelle est la différence fondamentale entre les cas $a > 0$ et $a < 0$?
   (b) Montrer que la fonction $r \to rf(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique.
   (c) Dans la sphère, $n(r,t)$ s'annule à tout instant en $r = R$, mais ne s'annule pas à l'intérieur de la sphère. On pose :

$$k = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{v-1}{\tau} - a\right)}.$$

   Calculer $f(r)$ à une constante multiplicative près notée f_0.
   (d) Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de v, D et τ.
   (e) Pour U^{235} de masse volumique $\rho = 19.10^3$ kg.m^{-3} : $\pi^2 D\tau = 2,2.10^{-2}$ m^2 et $v = 2,5$. Calculer la valeur R_c du rayon critique, ainsi que la masse critique m_c (masse d'une sphère d'uranium de rayon R_c).
5. Pour des raisons de sécurité, on ne peut pas stocker sans précautions une masse d'uranium supérieure à la masse critique. Quelle disposition raisonnable pouvez-vous suggérer pour le conditionnement d'une arme nucléaire, embarquée dans un missile ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?