Méthodes à retenir :

- Pour démontrer qu'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur un intervalle I vers une fonction somme S, il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,I}$ converge. On a alors convergence normale donc convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles vers la fonction somme.
- Sur un intervalle I, lorsque la série de fonctions continues $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément (a fortiori si converge normalement), alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
- Sur un segment $[a,b]$, le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la série de fonction converge uniformément, a fortiori lorsqu'elle converge normalement sur $[a,b]$.
- Sur un intervalle quelconque I, le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$, lorsque la série de fonction c.p.m.intégrables converge simplement, et que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.
- Sur un intervalle quelconque I, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur I, et telle que la série $\sum u_n'$ des dérivées CVU sur I, on peut dériver terme à terme.

I. Exemples usuels

Exercice 1 *La fonction Dzêta de Riemann*

1. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.
2. Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
   Justifier que ζ est continue sur $]1,+\infty[$, à l'aide de la convergence normale sur tout segment $[a,b]$ de $]1,+\infty[$ pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} z_n$, avec $z_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}$.
3. Justifier que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, à l'aide de la convergence normale sur tout segment $[a,b]$ de $]1,+\infty[$ pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} z_n'$.

II. Applications directes du cours

Exercice 2 ✫✫

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de u_n.
2. En déduire que pour tout $a > 0$, u_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{e^{-na}}{a}$.
3. Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-na}}{a}$?
4. Que peut-on en déduire pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$?
5. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3 ☆☆

Soit $I =]0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-nx}$.
Etudier la convergence simple puis la convergence normale sur I de la série de fonctions $\sum f_n$.
Même question en restriction à $J = [1/2, 1]$.

Exercice 4 ☆☆ *Interversion $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_{[0,1]}$: Théorème d'intégration terme à terme*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n :]0,1] \to \mathbb{R},\ t \longmapsto t^n \ln t$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $]0,1]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue intégrable sur $]0,1]$, et que : $\int_0^1 |v_n(t)|\mathrm{d}t = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   (c) En déduire que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \int_{]0,1]} |v_n|$ converge.
2. Justifier que pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.
3. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
   En appliquant le théorème d'intégration terme à terme, en déduire que : $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \dfrac{-\pi^2}{6}$

Exercice 5 ☆☆

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^2+x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 ☆☆☆ *Interversion $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, calculs de sommes de « séries dérivées »*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n :]-1,1[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto t^n$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers S : $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$.
   (c) Justifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} w_n'$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$.
2. En appliquant le théorème de dérivation terme à terme, en déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée en tout point.
3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
4. En reprenant la méthode à l'ordre 2, calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n(n-1)}{2^{n-2}}$.

III. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$g_n : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$, et normalement sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > 1$.
   On note $\tau :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ sa somme.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$\tau(x) = \left(2^{1-x} - 1\right) \zeta(x)$$

où $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

IV. Exercices

Exercice 8 ☆☆☆☆

On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x$ pour $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$

1. Calculer, pour $x \in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$

Exercice 9 ☆☆

Soit $a > 0$. Quel est l'ensemble de définition de $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(ax)^n$?

Exercice 10 ☆☆

1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$, où f_n est définie pour $x \in [0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^3+x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note S sa somme.
2) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty$.
3) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$? Normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^+$?
4) Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$, puis calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 11 ☆

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{x^2+n^2}$.

Exercice 12 ☆☆

Démontrer que $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^2}$ est et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

V. Pour aller plus loin

Exercice 13 ☆☆☆

Justifier que $f : t \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est 2π-périodique et impaire.

Exercice 14 ☆☆☆

1. Exprimer $\frac{1}{1+t}$ sous la forme de la somme d'une série numérique géométrique, pour $t \in [0,1[$.
2. Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Exercice 15 ☆☆☆

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. En remarquant que $S'(x)$ est du signe de $-1/x^2$, préciser le sens de variation de S.
3. Etablir
$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$
4. Donner un équivalent de S en 0.
5. En remarquant que
$$\frac{S(x)+S(x+1)}{2} \leq S(x) \leq \frac{S(x)+S(x-1)}{2}$$
donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 16 ☆☆☆☆ *Etude d'une somme de fonctions*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur
$$\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[.$$
On note S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et étudier le signe de $S'(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que S admet une limite en 1.
4. Montrer que S tend vers 0 en $+\infty$.
5. Donner le tableau de variations de S, puis tracer l'allure de la courbe représentative de S.

Exercice 17 ☆☆☆ *Intégrale d'une somme de fonctions*

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.

1. Justifier que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}_*^+$ par l'expression précédente.
2. Montrer que f est continue sur $I =]0,+\infty[$.
notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de I
3. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et que
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$
4. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

Problème 1 ✰✰✰✰ *Etude d'une fonction définie par une expression sous forme de série*

Lorsque cela a un sens, on pose

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$$

On note, pour tout $n\geq 1$, u_n la fonction $u_n : x\mapsto \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}$.

A) Séries numériques

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
2. Montrer l'existence d'un nombre réel γ tel que
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\underset{N\to+\infty}{=}\ln N+\gamma+o(1)$$
3. En déduire la valeur de la limite :
$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=N}^{2N}\frac{1}{n}$$
4. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}-\frac{2}{2n-1}$ converge. On note V sa somme.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1}=\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}$
   (c) En déduire la valeur de V.

B) Etude de S sur $\mathbb{R}^+$.

On notera $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers strictement négatifs.

1. Montrer que le domaine de définition de S est $D=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$.
2. Calculer $S(0)$; $S(1)$ et $S(-1/2)$.
3. Montrer : $\forall x\in D,\ S(x+1)-S(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
   En déduire $S(2)$et $S(1/2)$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_n(x)$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?
   (b) Soit $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. Etudier la convergence normale sur $[a;b]$.
   (c) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
5. (a) Justifier que $u_n\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et calculer u_n' sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) En déduire que $S\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et exprimer S' comme la somme d'une série de fonctions.
   (c) En déduire les variations de S sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0+}S'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}S'(x)$, et $\displaystyle\lim_{x\to 2}S'(x)$.
6. Soit la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :
$$\varphi_x : t\mapsto\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}$$
   (a) Déterminer une primitive Φ_x de φ_x.
   (b) Montrer que :
$$\forall n\geq 2,\ \int_n^{n+1}\varphi_x(t)\mathrm{d}t\leq\varphi_x(n)\leq\int_{n-1}^{n}\varphi_x(t)\mathrm{d}t$$
   (c) En déduire un encadrement de $S(x)$
   (d) Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Tracer le graphe de la fonction S sur $\mathbb{R}^+$.