

Méthodes à retenir :

- Pour démontrer qu'une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur un intervalle I vers une fonction somme S , il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty, I}$ converge. On a alors convergence normale donc convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles vers la fonction somme.
- Sur un intervalle I , lorsque la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément (a fortiori si converge normalement), alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .
- Sur un segment $[a, b]$, le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$, lorsque la série de fonction converge uniformément, a fortiori lorsqu'elle converge normalement sur $[a, b]$.
- Sur un intervalle quelconque I , le théorème d'intégration terme à terme permet de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$, lorsque la série de fonction c.p.m.intégrables converge simplement, et que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(t)| dt$ converge.
- Sur un intervalle quelconque I , pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I , telle que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur I , et telle que la série $\sum u'_n$ des dérivées CVU sur I , on peut dériver terme à terme.

I. Exemples usuels

Exercice 1 La fonction Dzêta de Riemann

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.
2. Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
Justifier que ζ est continue sur $]1, +\infty[$, à l'aide de la convergence normale sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$ pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} z_n$, avec $z_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.
3. Justifier que ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$, à l'aide de la convergence normale sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$ pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} z'_n$.

II. Applications directes du cours

Exercice 2 ☆☆

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-nx}}{x}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations de u_n .
2. En déduire que pour tout $a > 0$, u_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et $\|u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{e^{-na}}{a}$.
3. Quelle est la nature de la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-na}}{a} ?$$

4. Que peut-on en déduire pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$?

5. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 ☆☆☆

Soit $I =]0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-nx}$.

Etudier la convergence simple puis la convergence normale sur I de la série de fonctions $\sum f_n$.

Même question en restriction à $J = [1/2, 1]$.

Exercice 4 ☆☆☆ *Interversion* $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{et} \int_{[0,1]}$:

Théorème d'intégration terme à terme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n \ln t$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $]0, 1]$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue intégrable sur $]0, 1]$, et que :

$$\int_0^1 |v_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(c) En déduire que la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} \int_{]0,1]} |v_n| \text{ converge.}$$

2. Justifier que pour tout $t \in [0, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

3. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En appliquant le théorème d'intégration terme à

terme, en déduire que : $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = \frac{-\pi^2}{6}$

Exercice 5 ☆☆☆

Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 ☆☆☆ *Interversion* $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\frac{d}{dt}$, *calculs de sommes de « séries dérivées »*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$

1. (a) Justifier que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[$.

(b) Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge simplement sur $] - 1, 1[$ vers $S : t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

(c) Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} w'_n$ converge normalement sur tout segment de $] - 1, 1[$.

2. En appliquant le théorème de dérivation terme à terme, en déduire que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[$ et calculer sa dérivée en tout point.

3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

4. En reprenant la méthode à l'ordre 2, calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$.

III. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$g_n : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$, et normalement sur

$[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$.

On note $\tau :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sa somme.

2. Montrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$\tau(x) = (2^{1-x} - 1) \zeta(x)$$

où $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

IV. Exercices

Exercice 8 ☆☆☆☆

On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x$ pour $x \in]0, 1]$ et $u_n(0) = 0$

1. Calculer, pour $x \in]0, 1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

2. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3. En déduire l'égalité $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$

Exercice 9 ☆☆

Soit $a > 0$. Quel est l'ensemble de définition de $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n$?

Exercice 10 ☆☆

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$, où f_n est définie pour $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + x}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ . On note S sa somme.

2) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty$.

3) La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}^+ ?

Normalement sur tout segment de \mathbb{R}^+ ?

4) Montrer que la fonction S est continue sur \mathbb{R}^+ , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

Exercice 11 ☆

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{x^2 + n^2}.$$

Exercice 12 ☆☆

Démontrer que $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^2}$

est et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

V. Pour aller plus loin

Exercice 13 ☆☆☆

Justifier que $f : t \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^3}$ est définie et continue sur \mathbb{R} . Vérifier que f est 2π -périodique et impaire.

Exercice 14 ☆☆☆

- Exprimer $\frac{1}{1+t}$ sous la forme de la somme d'une série numérique géométrique, pour $t \in [0, 1[$.
- Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Exercice 15 ☆☆☆

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^{+\ast}$.
- En remarquant que $S'(x)$ est du signe de $-1/x^2$, préciser le sens de variation de S .
- Etablir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

- Donner un équivalent de S en 0.
- En remarquant que

$$\frac{S(x) + S(x+1)}{2} \leq S(x) \leq \frac{S(x) + S(x-1)}{2}$$

donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 16 ☆☆☆☆ Etude d'une somme de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}$$

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur

$$\mathcal{D} = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

On note S la somme de cette série de fonctions.

- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D} et étudier le signe de $S'(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}$.
- Montrer que S admet une limite en 1.
- Montrer que S tend vers 0 en $+\infty$.
- Donner le tableau de variations de S , puis tracer l'allure de la courbe représentative de S .

Exercice 17 ☆☆☆ Intégrale d'une somme de fonctions

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.

- Justifier que l'on définit bien une fonction f sur \mathbb{R}_*^+ par l'expression précédente.
- Montrer que f est continue sur $I =]0, +\infty[$. notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de I
- Montrer que f est intégrable sur $]0, 1[$ et que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1 + \sqrt{n+1})}$$

- Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Problème 1 ☆☆☆☆ *Etude d'une fonction définie par une expression sous forme de série*

Lorsque cela a un sens, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

On note, pour tout $n \geq 1$, u_n la fonction $u_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

A) Séries numériques

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

2. Montrer l'existence d'un nombre réel γ tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$$

3. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{n}$$

4. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}$ converge. On note V sa somme.

- (b) Montrer que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n}$

- (c) En déduire la valeur de V .

B) Etude de S sur \mathbb{R}^+ .

On notera \mathbb{Z}^- l'ensemble des entiers strictement négatifs.

1. Montrer que le domaine de définition de S est $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.
2. Calculer $S(0)$; $S(1)$ et $S(-1/2)$.
3. Montrer : $\forall x \in D, S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$.
En déduire $S(2)$ et $S(1/2)$.

4. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x)$. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}^+ ?

- (b) Soit $[a; b]$ un segment inclus dans \mathbb{R}^+ . Etudier la convergence normale sur $[a; b]$.

- (c) Montrer que S est continue sur \mathbb{R}^+ .

5. (a) Justifier que $u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et calculer u_n' sur \mathbb{R}^+ .

- (b) En déduire que $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et exprimer S' comme la somme d'une série de fonctions.

- (c) En déduire les variations de S sur \mathbb{R}^+ .

- (d) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0+} S'(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} S'(x)$, et $\lim_{x \rightarrow 2} S'(x)$.

6. Soit la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\varphi_x : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$$

- (a) Déterminer une primitive Φ_x de φ_x .

- (b) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(n) \leq \int_{n-1}^n \varphi_x(t) dt$$

- (c) En déduire un encadrement de $S(x)$

- (d) Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Tracer le graphe de la fonction S sur \mathbb{R}^+ .